0

Inhaltsverzeichnis

1. Potenzreihen

1.1 Unendliche Reihen

In diesem ersten Abschnitt werden einige Eigenschaften unendlicher Reihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ behandelt. Diese Reihen sind für den weiteren Verlauf der Funktionentheorie unverzichtbar und sollen daher nocheinmal und dann einschließlich der jetzt möglichen kurzen Beweise dargestellt werden. Da eine enendliche Summe elementar nicht bildbar ist, wird diese mit Hilfe der im vorstehenden Teil hergeleiteten Eigenschaften konvergenter Folgen definiert. Diese Reihen spielen in weiten Bereichen der Analysis eine wichtige Rolle, so können mit derartigen Reihen die wichtigsten wichtigsten Funktionen der Analysis, wie die Exponential– und die Winkelfunktionen eingeführt werden.

1.1.1 Definition: *Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$s_n = a_0 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ ,$$

die n-te **Partialsumme** *der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt eine* **konvergente Reihe**, *wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $s_n \to a$ bei $n \to \infty$. Wir nennen dann a den* **Summenwert** *der Reihe und schreiben $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Eine nicht konvergente Reihe heißt auch eine* **divergente Reihe**.

Da der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist, ist der Summenwert a der unendlichen Reihe ebenfalls eindeutig bestimmt, wenn er existiert. Wir notieren jetzt eine elementare Aussage über konvergente Reihen.

1.1.2 Bemerkung: *Konvergiert die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist die Folge der Glieder $a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge im Sinn von $a_n \to 0$ bei $n \to \infty$.*

Beweis: Es sei $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Partialsummen und a der Summenwert der Reihe. Es gilt $s_n \to a$ und $s_{n-1} \to a$ bei $n \to \infty$ und damit $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ bei $n \to \infty$. □

1.1.3 Beispiel: Die **harmonische Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Wir geben zunächst einen relativ elementaren Beweis dieser Aussage an. Ein einfacherer wird kann mit Hilfe uneigentlicher Integrale geführt werden. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $k(n) = 2^n$ und

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k(n)}$. Dann gilt offenbar

$$\big(x_{n+1} - x_n\big) \;=\; \sum_{j=k(n)+1}^{k(n+1)} \frac{1}{j} \;\geq\; \big(k(n+1) - k(n)\big) \cdot \min\left\{\frac{1}{j} \,\middle|\, 2^n < j \leq 2^{n+1}\right\} \;=\; \frac{2^n}{2^{n+1}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Durch vollständige Induktion folgt $x_n \geq \frac{n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Aussage. □

1.1.4 Beispiel: Es sei $a \in \mathbb{C}$. Für $|a| < 1$ konvergiert die **geometrische Reihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ mit dem Summenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Beweis: Für jedes $a \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Wir zeigen diese Formel durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist sie offenbar richtig.
$(n \Rightarrow n+1)$: Es gilt

$$s_{n+1} \;=\; s_n + a^{n+1} \;=\; \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} \;=\; \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} \;=\; \frac{1-a^{n+2}}{1-a}\;.$$

Damit ist die Formel bewiesen worden. Ist jetzt $|a| < 1$, so folgt $a^n \to 0$ bei $n \to \infty$ und damit $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \to \frac{1}{1-a}$ bei $n \to \infty$ also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. □

1.1.5 Bemerkung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien konvergente Reihen komplexer Zahlen, und es sei* $c \in \mathbb{C}$. *Die Reihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ca_n$ *sind konvergent mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \;\textit{und}\; \sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Der einfache Beweis dieser Aussage folgt unmittelbar aus der Definition konvergenter Reihen; er bleibt dem Leser überlassen. Wir zeigen jetzt ein einfaches Kriterium, das in einigen wichigen Spezialfällen benutzt werden kann um die Konvergenz einer Reihe sehr einfach nachzuweisen:

1.1.6 Satz: (Leibnizsche Regel für alternierende Reihen) *Es sei* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $a_{n-1} \geq a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *und es gelte weiter* $a_n \to 0$ *bei* $n \to \infty$. *Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konvergent.*

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n = s_{2n-1}$ und $y_n = s_{2n}$. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + a_{2n} \ \geq \ x_n \ \geq 0\,, \\ x_{n+1} - x_n &= -a_{2n+1} + a_{2n} \ \geq \ 0 \\ y_{n+1} - y_n &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \ \leq \ 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher sind die Folgen $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty$ beschränkt, die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist monoton wachsend und die Folge $(y_n)_{n=1}^\infty$ ist monoton fallend. Daher existieren $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$ bei $n \to \infty$. Wegen $y_n - x_n = a_{2n} \to 0$ bei $n \to \infty$ folgt $x_0 = y_0$ und damit $s_n \to x_0$ bei $n \to \infty$, was zu zeigen war. □

1.1.7 Beispiel: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent, obwohl die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

Bekanntlich ist bei einer Summe von endlich vielen Summanden der Wert dieser Summe unabhängig von der Reihenfolge der Summanden. Bei konvergenten unendlichen Reihen ist die Situation allerdings wesentlich komplizierter. Zunächst zeigen wir ein Resultat, welches besagt, dass im Fall $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau die bekannte Situation vorliegt:

1.1.8 Bemerkung: *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sei eine unendliche Reihe reeller Zahlen $a_n \geq 0$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.*

Anmerkung: Wegen dieser Aussage ist auch die folgende Schreibweise sinnvoll: Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sei eine unendliche Reihe reeller Zahlen $a_n \geq 0$, so schreiben wir auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, wenn diese Reihe konvergiert und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, wenn diese Reihe divergiert.

Beweis: Wegen $a_n \geq 0$ ist die Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$ der Partialsummen $s_n = a_0 + \ldots + a_n$ monoton wachsend. Die Aussage folgt daher unmittelbar. □

1.1.9 Lemma: *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sei eine konvergente Reihe reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelten die folgenden Aussagen.*

i) *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k(n)}$ ist konvergent für jede Teilfolge $(a_{k(n)})_{n=0}^\infty$; es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k(n)} \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.*

ii) *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\Theta(n)}$ ist konvergent für jede bijektive Abbildung $\Theta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Theta(n)}.$$

Beweis: ii) Wir wählen $n \in \mathbb{N}$, dann $m \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \ldots, n\} \subset \{\theta(1), \ldots, \theta(m)\}$ und dann $r \in \mathbb{N}$ mit $\{\theta(1), \ldots, \theta(m)\} \subset \{1, \ldots, r\}$. Offenbar gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\theta(j)} \leq \sum_{j=0}^{r} a_j.$$

Die Grenzübergänge $r \to \infty$, $m \to \infty$ und $n \to \infty$ nacheinander ausgeführt liefern

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \le \sum_{j=1}^{\infty} a_{\theta(j)} \le \sum_{j=0}^{\infty} a_j,$$

also die behauptete Aussage. i) kann entsprechend nachgewiesen werden. □

1.1.10 Beispiel: Es existiert eine Umordnung oder bijektive Abbildung $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\Theta(n)}}{\Theta(n)}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert.

Beweis: Bekanntlich ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent mit dem uneigentlichen Summenwert ∞ und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent. Daher gilt auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$. Wir wählen ein $k(1) \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{k(1)} \frac{1}{2n} \ge 2$ und setzen $\Theta(1) = 2$, $\Theta(2) = 2 \cdot 2, \ldots, \Theta(k(1)) = 2k(1)$, $\Theta(k(1)+1) = 1$. Wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$ existiert ein $k(2) > k(1)$ mit $\sum\limits_{n=k(1)+1}^{k(2)} \frac{1}{2n} > 2$; wir setzen $\Theta(k(1)+2) = 2(k(1)+1), \ldots, \Theta(k(2)+1) = 2k(2)$, $\Theta(k(2)+2) = 1+2 = 3$. Setzen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir unmittelbar die bijektive Abbildung $\Theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der verlangten Eigenschaft. □

Es ist daher sinnvoll den Konvergenz-Begriff für Reihen zu verschärfen; die Reihen, die diesen verschärften Begriff der absoluten Konvergenz erfüllen, können dann beliebig umgeordnet werden. Dabei zeigt es sich, dass viele Eigenschaften absolut konvergenter Reihen sich sehr einfach auf die der speziellen Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden zurückführen lassen. Aus diesem Grund kann man auch die Theorie absolut konvergenter Reihen als die besonders einfache Theorie von Reihen mit reellen, nichtnegativen Summanden ansehen. Dazu benötigen wir die folgende Hilfsaussage über komplexe Zahlen; auf den sehr einfachen Beweis kann verzichtet werden.

1.1.11 Lemma: *Für $a \in \mathbb{C}$ bilden wir die* **Standard-Zerlegung**

$$a^1 = \max\{\operatorname{Re} a,\, 0\},\ a^2 = \max\{-\operatorname{Re} a,\, 0\},\ a^3 = \max\{\operatorname{Im} a,\, 0\},\ a^4 = \max\{-\operatorname{Im} a,\, 0\}\ .$$

Dann gilt $a = a^1 - a^2 + ia^3 - ia^4$ und $|a^k| \le |a|$ für $k = 1, 2, 3, 4$.

1.1.12 Satz: *Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen heißt* **absolut konvergent***, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Wir schreiben in diesem Fall auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Es gilt: Jede absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent mit*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $a_j^k \geq 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$ definiert gemäß 1.1.11. Wegen 1.1.8 konvergieren die Reihen $a^k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^k$, und es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a^1 - a^2 + ia^3 - ia^4$. Die behauptete Ungleichung folgt aus

$$\Big|\sum_{j=0}^{n} a_j\Big| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Das untenstehende sehr nützliche Vergleichskriterium ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition und der vorstehenden Resultate – siehe 1.1.12; auf die explizite Angabe des Beweises kann daher verzichtet werden.

1.1.13 Bemerkung: Majorantenkriterium *Gegeben seien $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

i) *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und es gilt $\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.*

ii) *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ divergent.*

1.1.14 Beispiel: Für $\alpha > 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $k(n) = 2^n$ und $x_n = \sum_{m=1}^{k(n)} \frac{1}{m^\alpha}$. Man erkennt unmittelbar

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq\ (x_{n+1} - x_n) = \sum_{j=k(n)+1}^{k(n+1)} \frac{1}{j^\alpha} \\ &\leq\ \Big(k(n+1) - k(n)\Big) \max\left\{\frac{1}{j^\alpha}\ \Big|\ 2^n < j \leq 2^{n+1}\right\}\ \leq\ \frac{2^n}{2^{n\alpha}}\ =\ 2^{n(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion folgt leicht mit Hilfe des Beweises von Beispiel 1.1.4

$$0 \leq x_n \leq \frac{1 - 2^{(n+1)(1-\alpha)}}{1 - 2^{(1-\alpha)}} \leq \frac{1}{1 - 2^{(1-\alpha)}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage folgt jetzt aus dem Majorantenkriterium 1.1.13. □

Aus der Aussage 1.1.9 folgt zusammen mit Lemma 1.1.11 unmittelbar die folgende Aussage über die Umordnung absolut konvergenter Reihen:

1.1.15 Folgerung: *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Es gelten die folgenden Aussagen.*

i) *$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)}$ ist absolut konvergent für jede Teilfolge $(a_{k(n)})_{n=0}^{\infty}$.*

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\Theta(n)}$ *ist konvergent für jede bijektive Abbildung* $\Theta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. *In diesem Fall gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Theta(n)}.$$

Hinweis: Eine Umkehrung der obigen Aussage ii) ist ebenfalls richtig: Ist für jede bijektive Abbildung $\theta : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\theta(n)}$ konvergent, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Speziell gelten derartige Umordnungsaussagen nicht für konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Wir verzichten auf den Beweis dieser verschärften Version. Wir notieren jetzt zwei hinreichende Kriterien für die absolute Konvergenz unendlicher Reihen. Da beide Kriterien mit annähernd gleichen Methoden gezeigt werden, führen wir einen gemeinsamen Beweis durch. Dabei können wir uns der Einfachheit halber auf Reihen mit nicht-negativen Summanden beschränken.

1.1.16 Bemerkung: Wurzelkriterium *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *seien* $0 \leq a_n \in \mathbb{R}$.

i) *Existiert ein* $c \in [0, 1[$ *mit* $\sqrt[n]{a_n} \leq c$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

ii) *Gilt* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

1.1.17 Bemerkung: Quotientenkriterium *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *seien* $0 < a_n \in \mathbb{R}$.

i) *Existiert ein* $c \in]0, 1[$ *mit* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

ii) *Gilt* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beweise: i) Es sei $p \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{a_n} \leq c$ für alle $n \geq p$ beziehungsweise mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$ für alle $n \geq p$. Es folgt $a_n \leq c^n$ beziehungsweise mit $a_{p+n} \leq a_p c^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Konvergenzverhaltens der geometrische Reihe – Beispiel 1.1.4 und wegen des Majorantenkriteriums 1.1.13 ist daher die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent in beiden Fällen.
ii) Wegen $a_n \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $a_n \geq a_p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq p$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

Anmerkung: Unter den Voraussetzungen der obenstehenden Aussagen ist im Fall

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ beziehugsweise} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &\geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \end{aligned}$$

sowohl Konvergenz als auch Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ möglich. Man vergleiche dazu auch das nachfolgenden Beispiel.

1.1.18 Beispiel: Es seien $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ und $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ bei $n \to \infty$ und $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$ und $\sqrt[n]{b_n} \to 1$ bei $n \to \infty$. Aufgrund der Aussagen der Beispiele 1.1.3 und 1.1.4 ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

1.1.19 Beispiel: Für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die **komplexe Exponentialfunktion** durch $\mathrm{e}^z = \exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wegen des Quotientenkriteriums 1.1.17 ist diese Reihe absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$: Ist $a_n = \frac{z^n}{n!}$ im Fall $z \neq 0$, so gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$ bei $n \to \infty$.

Der folgende Umordnungssatz dient dazu wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion herzuleiten.

1.1.20 Satz: (Umordnungssatz – Cauchyprodukt) *Für $a_{n,m} \in \mathbb{C}$ $(n,\, m \in \mathbb{N}_0)$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+m=k} a_{n,m}\Big).$$

Beweis: Wegen 1.1.11 nehmen wir wieder $0 \leq a_{n,m} \in \mathbb{R}$ an. Für alle Zahlen $p, r, q \in \mathbb{N}$ mit $2p \leq r$ und mit $r \leq q$ gilt offenbar

$$\{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n,\ m \leq p\} \subset \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n+m \leq r\} \text{ und}$$
$$\{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n+m \leq r\} \subset \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid n,\ m \leq q\}.$$

Es folgt durch Aufsummation über diese Indexmengen wegen $a_{n,m} \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{p}\Big(\sum_{m=0}^{p} a_{n,m}\Big) \leq \sum_{k=0}^{r}\Big(\sum_{n+m=k} a_{n,m}\Big) \leq \sum_{n=0}^{q}\Big(\sum_{m=0}^{q} a_{n,m}\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\Big).$$

Bei dem Grenzübergang $r \to \infty$ erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{p}\Big(\sum_{m=0}^{p} a_{n,m}\Big) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+m=k} a_{n,m}\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\Big)$$

für alle $p,\, q \in \mathbb{N}$ und mit dem Grenzübergang $p \to \infty$ die Behauptung. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Aussage des Umordnungssatzes nicht richtig bleibt, wenn auf absolute Konvergenz vezichtet wird:

1.1.21 Beispiel: Es seien $a_{n,m} = \frac{(-1)^{n+m}}{n+m+1}$ für alle $n,\, m \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $c_k = \sum\limits_{n+m=k} a_{n,m}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k,n}$ konvergent wegen des Leibnizkriteriums 1.1.6; wir setzen $b_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k,n}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Man erkennt unmittelbar $c_k = (-1)^k$, $|b_k| > |b_{k+1}|$ und $(-1)^k b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen des Leibnizkriteriums 1.1.6 ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent; die Aussage des Umordnungssatzes kann also nicht gelten. □

1.2 Potenzreihen

In diesem Abschnitt behandeln wir als Verallgemeinerung der Klasse aller Polynome die Klasse der sogenannten Potenzreihen und die Funktionen, die sich durch derartige Potenzreihen darstellen lassen. Bei allgemeineren Potenzreihen bleiben viele Aussagen richtig, müssen aber teilweise mit anderen Methoden nachgewiesen werden, das gilt insbesondere bei Aussagen über Differenzierbarkeit. Der Einfachheit halber betrachten wir Potenzreihen ausschließlich in Zusammenhang mit dem Konvergenzradius R. Diese Potenzreihe ist dann auf dem Kreis $K(0,\, R) \subset \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf diesem Kreis stetig und auch komplex differenzierbar ist. Diese komplexe Differenzierbarkeit kann formal wie bei Funktionen einer reellen Veränderlichen definiert werden, andererseits existieren in den Konsequenzen wesentliche Unterschiede.

1.2.1 Definition: *$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei eine Folge auf $\mathbb{C}$. Die formale Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt eine* **Potenzreihe** *in x. Im Fall $a_n,\, x \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sprechen wir auch von einer reellen Potenzreihe, und im Fall von $a_n,\, x \in \mathbb{C}$ von einer komplexen Potenzreihe.*

Wir kommen zu der folgenden Aussage:

1.2.2 Satz: *Gegeben sei die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $R \in [0,\, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

i) *Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent.*

ii) *Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent.*

Dieses eindeutig bestimmte R wird als **Konvergenzradius** *der Potenzreihe bezeichnet. Es gilt weiter die folgende Darstellung*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \,.$$

Anmerkung: Im Fall $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$ ist sowohl Konvergenz, absolute Konvergenz, als auch Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ möglich.

Beweis: Wir verweisen zunächst auf die Definition des Limes superior: Für eine reelle Zahlenfolge $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ gilt $c = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
1) Zu jedem $v \in \mathbb{R}$ mit $v > c$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_n < v$ für alle $n \geq m$.
2) Für alle $u \in \mathbb{R}$ mit $u < c$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid b_n > u\}$ unendlich.

R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und es sei $R > 0$. Wir setzen $c = \frac{1}{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ wählen wir $0 < v \in \mathbb{R}$ mit $|x|c = \dfrac{|x|}{R} < v < 1$. Wegen $c < \dfrac{v}{|x|}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{v}{|x|}$ oder äquivalent dazu mit $|a_n|\,|x^n| < v^n$ für alle $n \geq m$. Wegen des Konvergenzverhaltens der geometrischen Reihe – siehe Beispiel 1.1.4 und wegen

$0 < v < 1$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent.
Für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$ gilt $|x|c > 1$. Daher ist $\left\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n x^n| > 1\right\}$ eine unendliche Menge, die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kann wegen 1.1.2 nicht konvergieren. Wir haben also die Aussagen i) und ii) des folgenden Satzes bewiesen; die Anmerkung folgt dann aus dem nachfolgenden Beispiel. □

1.2.3 Beispiel: Bekanntlich gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$ bei $n \to \infty$. Daher haben die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

den Konvergenzradius $R = 1$. Wegen Beispiel 1.1.14 ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq R = 1$. Weiter ist wegen Beispiel 1.1.3 die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1^n$ divergent und wegen des Leibniz Kriteriums 1.1.6 die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ konvergent.

Die folgende Aussage ist eine Variation des Quotientenkriteriums für absolutkonvergente Reihen; es gestattet es oft, den Konvergenzradius einer Potenzreihe relativ einfach zu berechnen. Man beachte dabei, dass der Limes superior der Folge $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ bei $n \to \infty$ in den meisten Fällen nur schwer direkt zu bestimmen ist.

1.2.4 Bemerkung: *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *erfülle* $a_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*. Ferner gelte* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to c$ *bei* $n \to \infty$ *im weiteren Sinne für ein* $0 \leq c \leq \infty$*, dann folgt*

$$R = \frac{1}{c} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Beweis: Im Fall $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R = \frac{1}{c}$ existiert ein $u \in \mathbb{R}$ mit $c|x| < u < 1$; es folgt dann $|x|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < u$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wegen des Quotientenkriteriums 1.1.17 .
Im Fall $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R = \frac{1}{c}$ existiert ein $v \in \mathbb{R}$ mit $c|x| > v > 1$; es folgt dann $|x|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > v$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wegen des Quotientenkriteriums 1.1.17 .
Zusammenfassend folgt die Aussage jetzt aus 1.2.2 . □

1.2.5 Satz: *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *definieren wir die* **komplexe Exponentialfunktion** *durch* $\mathrm{e}^z = \exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$*. Es gilt*

i) *Diese Reihe ist absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$.
ii) *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$.
iii) *Es gilt* $\mathrm{e}^0 = 1,\ \mathrm{e}^z \neq 0,\ \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$ *und* $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: i) Es ist nur der Fall $z \neq 0$ zu betrachten. Wir setzen $a_n = \frac{z^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und erhalten $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$ bei $n \to \infty$. Das Quotientenkriteriums 1.1.17 implitiert, dass die Reihe absolut konvergent ist.

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $a_n = \frac{z^n}{n!}$ und $b_n = \frac{w^n}{n!}$. Wegen des Umordnungssatzes 1.1.20 und des Binomischen Lehrsatzes gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+m=k} a_n b_m\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+m=k} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{w^m}{m!}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+m=k} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{n!(k-n)!} z^n w^{k-n}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = \mathrm{e}^{z+w}.
\end{aligned}$$

iii) Offenbar gilt $\mathrm{e}^0 = 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt daher aus ii) unmittelbar $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{-z}$ und weiter $\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!}$ und damit die Aussage. □

Wir zeigen jetzt eine Aussasge, die wesentlich ist zum Nachweis der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion. Für allegeine Potenzreihen gehen wir entsprechend vor.

1.2.6 Satz: i) *Es gilt* $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \longrightarrow 1$ *bei* $x \to 0$.

ii) *Es gilt* $x^n \mathrm{e}^{-x} \to 0$ *und* $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to \infty$ *bei* $\mathbb{R} \ni x \to \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: i) Wir nehmen $x \in \mathbb{C}$ mit $0 < |x| \leq 1$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\Big| &= \frac{1}{|x|}\Big|\mathrm{e}^x - 1 - x\Big| = \frac{1}{|x|}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1 - x\Big| = \frac{1}{|x|}\Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big| \\
&= \frac{|x|^2}{|x|}\Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{k!}\Big| \leq |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} \leq |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!} = |x|\mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $|x|\mathrm{e} \to 0$ bei $x \to 0$ folgt unmittelbar $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \to 1$ bei $x \to 0$. □

ii) Es gilt wegen der Definition der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Es sei jetzt $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ und daher $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty$ bei $x \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch die erste Aussage klar. □

Ist jetzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $R > 0$, so definiert diese Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ einen Wert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}$. Wir wollen jetzt die Darstellbarkeit einer Funktion f auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ näher untersuchen.

1.2.7 Definition: $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ *sei eine offene Menge. Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *heiße eine* **analytische Funktion**, *wenn zu jedem* $w \in \Omega$ *und zu jedem* $r > 0$ *mit* $K(w,r) \subset \Omega$ *eine Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *existiert mit einem Konvergenzradius* $R \geq r$ *und mit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n \ \textit{für alle } z \in K(w,r) \ .$$

Bei reellwertigen Funktionen auf einem Intervall sprechen wir dann von reell-analytischen Funktionen, wenn sie um jeden Punkt des Intervalles in eine Potenzreihe entwickelbar sind.

Als erste Aussage zeigen wir jetzt, dass jede durch eine Potenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit einem Konvergenzradius $R > 0$ dargestellte Funktion $f : K(0,R) \to \mathbb{C} : f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $K(0,R)$ analytisch ist.

1.2.8 Bemerkung: *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *besitze einen Konvergenzradius* $R > 0$*. Weiter sei* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < R$*. Für alle* $j \in \mathbb{N}_0$ *sei* $c_j = \sum\limits_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} a_n z^{n-j}$*. Für alle* $x \in K(z,r)$ *mit* $r = R - |z|$ *gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} a_n z^{n-j} \Big) (x-z)^j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-z)^n \ .$$

Speziell besitzt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *einen Konvergenzradius* $\geq r$ *.*

Beweis: Wegen $|z| + |x-z| < R$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x-z| + |z|)^n$ konvergent. Daher gilt mit der Festsetzung $\binom{n}{j} = 0$ für alle $j > n \geq 0$ wegen der Binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x-z)^j z^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (x-z)^j z^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=j}^{\infty} a_n \binom{n}{j} z^{n-j} \Big) (x-z)^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x-z)^j. \end{aligned}$$

□

1.2.9 Lemma: *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *besitze den Konvergenzradius* R*. Dann besitzen die Potenzreihen* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *den gleichen Konvergenzradius* R*.*

Beweis: Es genügt den ersten Teil der Aussage zu zeigen, aus dieser folgt dann auch der zweite. Bekanntlich gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt bei $n \to \infty$. Es sei jetzt $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$, und dann $v \in \mathbb{R}$ mit $\frac{|x|}{R} < v < 1$. Es folgt $|x| \sqrt[n]{|a_n|} \leq v$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Ist also $v < v_1 < 1$

beliebig, so gilt $|x|\sqrt[n]{n|a_n|} \leq v_1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ absolut.
Ist andererseits $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wegen $|n a_n x^n| \geq |a_n x^n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ divergent. Die Aussage folgt jetzt aus 1.2.2 . $\square$

Für die folgende Aussage benötigen wir den Begriff der komplexen Differenzierbrkeit.

1.2.10 Definition: *$\Omega \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion und es sei $z_0 \in \Omega$. f heißt in z_0* **komplex differenzierbar** *mit der Ableitung $f'(z_0)$, wenn*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \;\to\; f'(z_0) \quad \text{gilt bei } z \to z_0 \,.$$

f heißt auf Ω komplex differenzierbar oder **holomorph**, *wenn f in jedem $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist. Wir schreiben dann auch $f \in H(\Omega)$.*

Demnach bezeichnet $H(\Omega)$ die Gesamtheit aller auf Ω holomorphen Funktionen. Wie in der Situation einer reellen Veränderlichen erkennt man, dass jede in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbare Funktion auch in z_0 stetig ist. Außerdem gelten die dort hergeleiteten Ableitungsregeln mit den gleichen Beweisen auch für komplex differenzierbare Funktionen. Daher verzichten wir auf den Beweis dieser Regeln, man vergleiche dazu den Beweis der entsprechenden Aussagen füur eine reelle Variable.

1.2.11 Bemerkung: *Es seien Ω, $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ offene Mengen, und es seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $h : \Omega_0 \to \Omega$ komplex differenzierbar. Es gilt:*

i) *$f \cdot g$, $f + g : \Omega \to \mathbb{C}$ sind komplex differenzierbar mit $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ und $(f + g)' = f' + g'$ auf Ω.*

ii) *Im Fall $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$ ist $\frac{1}{g} : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.*

iii) *$f \circ h : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar mit $(f \circ h)'(z) = f'\big(h(z)\big)h'(z)$ für alle $z \in \Omega_0$.*

Es besteht allerdings ein fundamentaler Unterschied: komplex differenzierbare Funktionen weisen wesentlich weitergehende Eigenschaften auf als reell differenzierbare, darauf wird zu einem späteren Zeitpunkt eingegangen. Beispielsweise ist jede auf Ω einmal komplex differenzierbare Funktion beliebig oft komplex differenzierbar. Zunächst stellen wir den Zusammenhang zwischen der komplexen Differenzierbarkeit einer komplexwertigen Funktion von einer komplexen Veränderlichen und der zugeordneten $\mathbb{R}^2-$wertigen Funktion von 2 reellen Veränderlichen her: Dabei fassen wir jedes $z \in \Omega$ als einen $\mathbb{R}^2-$Vektor $(x,\, y)^T$ mit $z = x + iy$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als eine $\mathbb{R}^2-$wertige Funktion $(u,\, v)^T$: $\Omega \to \mathbb{R}^2$ mit $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ auf. Es gilt dann die folgende Charakterisierung.

1.2.12 Satz: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ für $z = x + iy \in \Omega$. Es sei weiter $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.*

i) *Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist die zugeordnete reelle Funktion $(u, v)^t : \Omega \to \mathbb{R}^2$ in (x_0, y_0) total differenzierbar mit*

$$D\binom{u}{v}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix}.$$

Speziell gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** $D_x u = D_y v$, *und* $D_x v = -D_y u$.

ii) *Sind* $u,\, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *stetig partiell differenzierbar mit* $D_x u = D_y v,\ D_x v = -D_y u$, *so ist* f *auf* Ω *komplex differenzierbar mit* $f'(z) = D_x u(x,y) + iD_x v(x,y)$ *für alle* $z = x + iy \in \Omega$.

Beweis: Es seien $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, und $z = x + iy \in \Omega$. Offenbar gilt

$$\frac{1}{|(x,\,y)^T - (x_0,\,y_0)^T|}\left|\binom{u}{v}(x,y) - \binom{u}{v}(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\binom{x - x_0}{y - y_0}\right|$$
$$= \frac{1}{|z - z_0|}\big|f(z) - f(z_0) - \gamma(z - z_0)\big|\,.$$

i) Mit $\alpha = \operatorname{Re} f'(z_0),\ \beta = \operatorname{Im} f'(z_0)$ folgt damit beim Grenzübergang $z \to z_0$ unmittelbar die totale Differenzierbarkeit von $(u,v)^T$ in z_0 und die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
ii) Offenbar ist $(u,\,v)^T : \Omega \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar auf Ω mit der totalen Ableitung

$$D\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} D_x u(x,y) & D_y u(x,y) \\ D_x v(x,y) & D_y v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x u(x,y) & -D_x v(x,y) \\ D_x v(x,y) & D_x u(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $z = x + iy \in \Omega$. Setzen wir jetzt $\alpha = D_x u(x_0,y_0),\ \beta = D_x v(x_0,y_0)$, so erhalten wir aus der obigen Vorbemerkung $\frac{1}{|z - z_0|}\big|f(z) - f(z_0) - (\alpha + i\beta)(z - z_0)\big| \to 0$ bei $z \to z_0$. Es folgt $f'(z) = D_x u(x,y) + iD_x v(x,y)$ für alle $z = x + iy \in \Omega$. □

Wir notieren jetzt eine Variante des Mittelwertsatzes für holomorphe Funktionen. Man vergleiche etwa die vektorwertige Variante des Mittelwertsatzes.

1.2.13 Satz: *Es seien* $f \in H(\Omega)$ *und* $M > 0$ *mit* $|f'(z)| \le M$ *für alle* $z \in \Omega$. *Dann gilt* $|f(z) - f(z_0)| \le M|z - z_0|$ *für alle* $z,\ z_0 \in \Omega$ *mit* $|z_0,\, z| := \{tz + (1-t)z_0 \mid t \in [0,\,1]\} \subset \Omega$.

Beweis: Für alle $t \in [0,\,1]$ setzen wir $g(t) = f(tz + (1-t)z_0)$. Dann ist g differenzierbar mit $g'(t) = f'(tz + (1-t)z_0)(z - z_0)$ für alle $t \in [0,\,1]$. Es folgt aus dem Mittelwertsatz, dass ein $c \in]0,\,1[$ existiert mit

$$|f(z) - f(z_0)| = |g(1) - g(0)| \le |g'(c)| \le M|z - z_0|\,.$$

□

Die folgende Aussage besagt, dass eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion innerhalb des Konvergenzkreises differenzierbar ist und dass die Ableitung dieser Funktion durch Differentiation unter dem Summenzeichen gebildet werden kann. Die Reihenfolge von Differentiation und Summation kann also vertauscht werden. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Bildung einer Stammfunktion.

1.2.14 Satz: *Die Potenzreihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *besitze den Konvergenzradius* $R > 0$. *Die Potenzreihen* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *besitzen ebenfalls den Konvergenzradius* R. *Für* $x \in K(0,\,R) \subset \mathbb{C}$ *sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,, \quad \text{und } h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\,.$$

Die Funktionen f und h sind auf $K(0,\, R)$ komplex differenzierbar mit

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\ , \ \textit{und}\ h'(x) = f(x)\ .$$

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt aus 1.2.7. Wir zeigen jetzt, dass f in einem beliebigen $x \in K(0,\, R)$ komplex differenzierbar ist mit $f'(x) = g(x)$. Aus dieser Konstruktion folgt dann unmittelbar auch $h'(x) = f(x)$. Es sei also $x \in K(0, R)$. Für jedes $z \in K(0,\, R)$ mit $x \neq z$ und $|x - z| < R - |x|$ gilt dann wegen 1.2.14

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x)^k \quad \text{mit } c_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}\ .$$

Wegen $f(x) = c_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ folgt

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - x)^{k-1}\ \to\ c_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = g(x)$$

bei $z \to x$. Man beachte dabei: Ist $\delta > 0$ mit $|x| + \delta < R$ und gilt $|x - z| < \delta$, so folgt

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - z)^{k-1} - c_1\Big| = |x - z|\,\Big|\sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - z)^{k-2}\Big| \leq |x - z| \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \delta^{k-2}\ \to\ 0$$

bei $z \to x$ wegen $\sum\limits_{k=2}^{\infty} |c_k| \delta^{k-2} < \infty$. □

Die Aussage des vorstehenden Satzes kann benutzt werden, gewisse Reihen oder Potenzreihen auszuwerten; wir haben folgendes Beispiel:

1.2.15 Beispiel: i) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x < 1$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1 - x)$.

Beweis: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz der Aussagen des Satzes 1.2.14. □

Anmerkung: Gegeben sei eine Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mit einem Konvergenzradius $R > 0$. Aus 1.2.9 folgt unmittelbar

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Folglich gilt $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Es sei jetzt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Mit den Bezeichnungen des Taylorschen Satzes gilt für $x_0, x \in I$

$$p_{n,f}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^j$$

– das n-te Taylorpolynom. Weiter sei $R_{n,f}(x) = f(x) - p_{n,f}(x)$ – das n-te Restglied. Gilt $R_{n,f}(t) \to 0$ bei $n \to \infty$ für ein $t \neq x_0$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$ konvergent mit $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Folglich besitzt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ einen Konvergenzradius $R \geq |t - x_0|$ – siehe 1.2.2 . Gilt speziell $R_{n,f}(t) \to 0$ bei $n \to \infty$ für alle $t \in K(x_0, r) \cap \mathbb{R}$, so ist f auf $]x_0 - r,\, x_0 + r[$ durch eine Potenzreihe darstellbar.

1.2.16 Satz: (Identitätssatz) *Es seien zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien $\geq R > 0$ gegeben:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \textit{und } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \; .$$

Es existiere ferner eine Folge $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset K(x_0, R)$ mit $x_m \to z$ bei $m \to \infty$ für ein $z \in K(x_0, R)$, mit $x_m \neq z$ und $f(x_m) = g(x_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also $f(x) = g(x)$ für alle $x \in K(x_0, R)$.

Beweis: Der Beweis zerfällt in mehrere Teile: **(I)** Wegen $f(x) - g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n$ für alle $x \in K(0, R)$ genügt es zu zeigen, dass aus $f(x_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ stets $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt.

(II) Es sei $h: \quad h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-z)^n$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $\geq r \geq R - |z|$, und es gelte $h(x_m) = 0$ für die gegebene Folge $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset K(z, r) \setminus \{z\}$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von h und wegen $x_m \to z$ bei $m \to \infty$ auch $h(z) = c_0 = 0$.

(III) Wegen 1.2.8 existieren $c_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-z)^n \qquad \text{für alle } x \in K(z, r) \; .$$

setzen wir $h_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-z)^n$, so folgt aus (II) unmittelbar $c_0 = 0$, also

$$h_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-z)^n = (x-z)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(x-z)^n = (x-z)h_1(x) \; .$$

Wegen $x_m \neq z$ und $h_0(x_m) = 0$ folgt auch $h_1(x_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und wegen (II) auch $c_1 = 0$. Mit dieser Methode folgt schließlich $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(IV) Im Fall $z = 0$ ist der Beweis beendet. Im Fall $z \neq 0$ sei $u \in \mathbb{C}$ mit $z = |z|\, u$.
Wir setzen jetzt $z_1 = z - ru$, wenn $0 \notin K(z, r)$ gilt und $z_1 = 0$ sonst. Für fast alle $m \in \mathbb{N}$ mit $w_m := z_1 + \frac{1}{m}\, u \in K(z, r)$ gilt $f(w_m) = 0$ und $w_m \to z_1$ bei $m \to \infty$. Wegen (III) erhalten wir für die Koeffizienten der Darstellung von f: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c'_n(x-z_1)^n$ die Beziehung $c'_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir halten u fest, ersetzen z durch z_1 und wiederholen die gleiche Konstruktion, bis wir $z_1 = 0$ erreichen. In diesem Fall folgt dann $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

1.2.17 Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$ bestimme man den Wert der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Offenbar ist diese Reihe absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ als Teilreihe der Exponentialfunktion. Wir definieren $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$. Dann ist g differenzierbar mit $g^{(4)}(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, mit $g(0) = 1$ und $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$. g ist also eine Lösung der Differentialgleichung $y^{(4)} - y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$. Diese Lösung ist also von der Form

$$g(t) = a_1 \mathrm{e}^t + a_2 \mathrm{e}^{-t} + a_3 \cos(t) + a_4 \sin(t)$$

mit geeigneten Konstanten $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung dieser Konstanten setzen wir $g(0) = 1$ und $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ ein und erhalten das Gleichungssysten $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, $a_1 - a_2 + a_4 = 0$, $a_1 + a_2 - a_3 = 0$, $a + 1 - a_2 - a_4 = 0$ mit den Lösungen $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 0$ also

$$g(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \ .$$

1.3 Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt definieren wir die so genannten Kurvenintegrale und zeigen dann damit die Existenz von Stammfunktionen von Funktionen mehrerer Veränderlicher unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen. Zunächst diskutiern wir die Variante für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher; später stellen wir dann den Zusammenhang mit der Variante der komplexen Kurvenintegrale her.

Zu Beginn betrachten wir als Begründung der Vorgehensweise die folgende Situation: Gegeben seien eine offene Teilmenge $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^q$, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F : X \to \mathbb{R}$, und eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ mit $\varphi(t) \in X$ für alle $t \in [a, b]$. Wegen des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt dann

$$F\big(\varphi(t)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \int_a^t \big(F \circ \varphi\big)'(s)\, ds = \int_a^t \big\langle \nabla F\big(\varphi(s)\big),\, \varphi'(s)\big\rangle\, ds\ .$$

Diese Darstellung übertragen wir nun auf eine allgemeinere Situation und ersetzen $DF = \nabla F$ durch eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}^q$. Für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ mit $\varphi(t) \in X$ für alle $t \in [a, b]$ definieren wir also das **Kurvenintegral** durch

$$\int_\varphi \langle f(x),\, dx\rangle = \int_a^b \big\langle f\big(\varphi(t)\big),\, \varphi'(t)\big\rangle\, dt\ .$$

Ist jetzt $\psi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, so folgt aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_c^d \big\langle f(\varphi \circ \psi(t)),\, (\varphi \circ \psi)'(t)\big\rangle\, dt &= \int_c^d \big\langle f\big(\varphi(\psi(t))\big),\, \varphi'(\psi(t))\psi'(t)\big\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \big\langle f(\varphi(s)),\, \varphi'(s)\big\rangle\, ds\ .\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Kurven $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ und $\varphi \circ \psi : [c, d] \to \mathbb{R}^q$ als äquivalent; aus der obigen Rechnung folgt, dass der Übergang zu äquivalenten Kurvendarstellungen den Wert des Kurvenintegrals nicht ändert. Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung:

1.3.1 Bemerkung: *Es seien $X \subset \mathbb{R}^q$ eine nichtleere offene Menge, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f : X \to \mathbb{R}^p$ stetig. Weiter existiere zu f eine* **Stammfunktion** *$F : X \to \mathbb{R}$ in dem Sinn, dass F auf X differenzierbar ist mit $\nabla F(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Die Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ sei stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b \big\langle f(\varphi(t)),\, \varphi'(t)\big\rangle\, dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\ .$$

Beweis: Für alle $t \in [a, b]$ setzen wir $g(t) = F\big(\varphi(t)\big)$ und erhalten

$$\begin{aligned} F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) &= g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \big\langle \nabla F\big(\varphi(t)\big), \varphi'(t)\big\rangle\,dt = \int_a^b \big\langle f\big(\varphi(t)\big), \varphi'(t)\big\rangle\,dt\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf interessieren wir uns zunächst für die Existenz von Stammfunktionen. Hier ist die Situation anders als bei Funktionen einer reellen Veränderlichen, wo jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Eds müssen jetzt zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden.

Die erste dieser Voraussetzungen beschreibt dabei die geeigneten Mengen: Wir nennen eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^q$ **sternförmig**, wenn ein $a \in X$ existiert mit $|a, x| \subset X$ für alle $x \in X$. In diesem Fall heißt $a \in X$ dann das Sternzentrum von X. In der folgenden Aussage wird ein Kriterium dafür angegeben, dass auf einer sternförmigen Menge eine Stammfunktion F existiert. Dieses Kriterium besagt im Fall einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion F gerade die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiation. Zunächst benötigen wir eine einfache Hilfsaussage zur Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation und der Integration:

1.3.2 Lemma: i) *Es seien $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^q$ offen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, $1 \leq k \leq q$, und die Funktion $f : \Omega \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar nach der $k-$ten Variablen. Wir definieren $F : \Omega \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x, t)dt \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Dann ist F stetig nach der $k-$ten Variablen differenzierbar mit

$$D_kF(x) = \int_\alpha^\beta D_kf(x, t)dt \text{ für alle } x \in \Omega.$$

ii) *Es seien $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, $1 \leq k \leq q$, und die Funktion $f : \Omega \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar nach der erstenten Variablen. Wir definieren $F : \Omega \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(x, t)dt \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Dann ist F stetig nach der ersten Variablen differenzierbar mit

$$D_kF(x) = \int_\alpha^\beta D_kf(x, t)dt \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Beweis: i) Wir fixieren $x \in \Omega$ und dann ein $r > 0$ mit $\overline{K}(x, r) \subset \Omega$. Da die Funktion $D_k f$ auf $\Omega \times [\alpha, \beta$ stetig ist, muss sie auf der kompakten Menge $\overline{K}(x, r) \times [\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig sein. Es sei jetzt $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|D_k f(x, t) - d_k f(z, t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ und alle $z \in K(x, \delta)$. Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < \delta$ und alle $t \in [\alpha, \beta]$ existiert wegen des Mittelwertsatzes ein σ zwischen 0 und s mit $f(x + se^k, t) - f(x, t) = sD_k f(x + \sigma e^k, t)$. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+se^k)-f(x)}{s} - \int_\alpha^\beta D_k f(x, t)dt\right| &= \left|\int_\alpha^\beta \Big(\frac{f(x+se^k, t)-f(x, t)}{s} - D_k f(x, t)\Big)dt\right| \\
&\le \int_\alpha^\beta \Big|D_k f(x+\sigma e^k, t) - d_k f(x, t)\Big| dt \;\le\; \varepsilon(\beta-\alpha) .
\end{aligned}
$$

Damit ist Aussage i) gezeigt worden.

ii) folgt aus i) durch Betrachtung von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$, wenn Ω als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ aufgefasst wird. □

1.3.3 Satz: *Es sei $X \subset \mathbb{R}^q$ eine nichtleere offene Menge, die sternförmig bezüglich $a \in X$ ist. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^q$ sei stetig differenzierbar mit*

$$
D_i f_k(x) = D_k f_i(x) \qquad \textit{für alle } x \in X,\; i,\, k = 1, \dots, q .
$$

Dann existiert eine Stammfunktion $F : X \to \mathbb{R}$ in dem Sinne von $DF(x) = \nabla F(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Diese Stammfunktion ist eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante. Für alle $x \in X$ wird F gegeben durch

$$
F(x) = \int_0^1 \Big\langle f(a + t(x-a)),\, x - a\Big\rangle\, dt .
$$

Beweis: Für alle $x \in X$, $i \in \{1, \dots, q\}$ und $0 \le t \le 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
D_i\Big\langle f\big(a + t(x-a)\big),\, (x-a)\Big\rangle &= f_i\big(a+t(x-a)\big) + \sum_{k=1}^q D_i f_k\big(a+t(x-a)\big)t(x_k - a_k) \\
&= f_i\big(a+t(x-a)\big) + \sum_{k=1}^q D_k f_i\big(a+t(x-a)\big)t(x_k - a_k) .
\end{aligned}
$$

Wegen 1.3.2 folgt daher

$$\begin{aligned}
D_iF(x) &= D_i\int_0^1 \Big\langle f\big(a+t(x-a)\big),\, x-a\Big\rangle\, dt \\
&= \int_0^1 D_i\Big\langle f\big(a+t(x-a)\big),\, (x-a)\Big\rangle\, dt \\
&= \int_0^1 \Big[f_i\big(a+t(x-a)\big) + \sum_{k=1}^{q} D_kf_i\big(a+t(x-a)\big)t(x_k-a_k)\Big]\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[tf_i\big(a+t(x-a)\big)\Big]\, dt \;=\; f_i(x)\,.
\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. □

Wir zeigen jetzt mit Hilfe eines Beispiels, dass in dem obigen Satz nicht auf auf eine spezielle Bedingung für die Gestalt des Definitionsbereiches verzichtet werden kann. Allerdings ist die Sternförmigkeit nicht notwenig; so ist beispielweise die Aussage des Satzes ebenfalls richtig, wenn X die Vereinigung zweier sternförmiger Mengen mit nichtleerem Durchschnitt ist. Besitzt die Menge allerdings *Löcher*, so existieren stets Gegenbeispiele.

1.3.4 Beispiel: Es sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir setzen weiter

$$f(x,\, y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,\, y)^T \in X\,.$$

Man erhält unmittelbar $D_2f_1(x,\, y) = \dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = D_1f_2(x,\, y)$ für alle $(x,\, y)^T \in X$. Wir betrachten jetzt den Pfad $\varphi : [0,\, 2\pi] \to X$ definiert durch $\varphi(t) = \big(\cos(t),\, \sin(t)\big)^T$ für alle $t \in [0,\, 2\pi]$. Dann gilt $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \big(1,\, 0\big)^T$ und andererseits

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \Big\langle f\big(\cos(t),\, \sin(t)\big),\, \big(-\sin(t),\, \cos(t)\big)^T\Big\rangle\, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \big(-\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t)\cos(t)\big)\, dt \;=\; 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Wegen 1.3.1 kann f daher keine Stammfunktion auf X besitzen. □

1.3.5 Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,\, y) = \Big(\mathrm{e}^x(2xy^2+x^2y^2),\, \mathrm{e}^x2x^2y\Big) \quad \text{für } (x,\, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Der Definitionsbereich ist sternförmig bezüglich 0. Weiter gilt

$$D_y f_1(x,y) = \mathrm{e}^x(4xy + 2x^2y) = D_x f_2(x,\, y) \;\text{ für alle } (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Eine Stammfunktion von f wird also gegeben durch

$$\begin{aligned}
F(x,\, y) &= \int_0^1 \Big\langle f(tx,\, ty),\, (x,\, y)\Big\rangle dt \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\big(2x^2y^2t^3 + x^3y^2t^4 + 2x^2y^2t^3\big)\, dt \\
&= 4x^2y^2 \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}t^3\, dt + x^3y^2 \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}t^4\, dt \\
&= 4x^2y^2 \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}t^3\, dt + x^2y^2\Big(\mathrm{e}^x - 4\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}t^3\, dt\Big) \\
&= x^2y^2\mathrm{e}^x \quad \text{ für alle } (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,.
\end{aligned}$$

□

1.3.6 Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert wie in Beispiel 1.3.5, und die Kurve $\varphi : [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2$ werde gegeben durch

$$\varphi(t) = \Big(\sqrt{t^2 + 2t^6 + 1},\, \sin\big(\frac{\pi t^2}{2}\big)\Big) \,.$$

Man berechne das Kurvenintegral $\int_\varphi \langle f(x),\, dx\rangle$: Wegen 1.3.1 und 1.3.5 gilt

$$\int_\varphi f(x)\, dx = F\Big(\varphi(1)\Big) - F\Big(\varphi(0)\Big) = 4\mathrm{e}^2 \,.$$

□

1.4 Komplexe Kurvenintegrale

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ stets eine offene nichtleere Teilmenge. Mit $H(\Omega)$ bezeichnen wir gemäß 1.2.10 die Gesamtheit aller holomorphen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Wie im vorstehenden Abschnitt verstehen wir unter einer Kurve oder einem Weg in $\mathbb{C}$ eine stetige Abbildung $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, wobei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Im Fall $\varphi(a) = \varphi(b)$ heißt diese Kurve geschlossen und im Fall $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ für alle $x \neq y$, $x, y \in [a, b[$ doppelpunktfrei. Eine Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt ein **Pfad**, wenn φ zusätzlich stückweise differenzierbar ist; wenn also $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ existieren, so dass f auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ stetig differenzierbar ist. Bekanntlich gilt sich für die Bogenlänge $L(\varphi)$ eines Pfades $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt\ .$$

Ist jetzt $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein Pfad mit Werten in Ω, also mit $\varphi(t) \in \Omega$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ – wir schreiben dafür auch kurz $\{\varphi\} \subset \Omega$, so definieren wir für jede stetige Funktion $f : \{\varphi\} \to \mathbb{C}$ das **Kurvenintegral**

$$\int_\varphi f(w)\, dw \ = \ \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt\ .$$

Dieses so definierte Kurvenintegral ist nicht mit dem im vorstehenden Abschnitt betrachteten Kurvenintegral identisch, sondern es unterscheidet sich von diesem in der Definition, allerdings lassen sich die meisten Resultate recht einfach übertragen. Gilt zusätzlich noch $|f(w)| \leq M$ für ein $M > 0$ und alle $w \in \{\varphi\}$, so folgt unmittelbar die Abschätzung für das Kurvenintegral

$$\Big|\int_\varphi f(w)\, dw\Big| \ \leq \ M \cdot L(\varphi)\ .$$

Wie eben folgt die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals bei äquivalenten Kurvendarstellungen und der Bogenlänge aus der Substitutionsregel. Wir verzichten daher auf die Durchführung eines Beweises.

1.4.1 Bemerkung: *$\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei ein Pfad mit $\{\varphi\} \subset \Omega$. Die Funktion $f : \{\varphi\} \to \mathbb{C}$ sei stetig und $h : [c, d] \to [a, b]$ sei differenzierbar. Wir setzen $\psi(s) = \varphi\big(h(s)\big)$ für alle $s \in [c, d]$.*

i) *h sei streng monoton wachsend mit $h(c) = a$ und $h(d) = b$. Dann gilt*

$$L(\varphi) = L(\psi) \ \ \textit{und} \ \ \int_\varphi f(w)\, dw \ = \ \int_\psi f(w)\, dw\ .$$

ii) *h sei streng monoton fallend mit $h(c) = b$ und $h(d) = a$. Dann gilt*

$$L(\varphi) = L(\psi) \ \ \textit{und} \ \ \int_\varphi f(w)\, dw \ = \ -\int_\psi f(w)\, dw\ .$$

Für $u, w \in \Omega$ mit $|u, w| = \{(1-t)u + tw \mid 0 \leq 1\} \subset \Omega$ und jede stetige Funktion $f : |u, w| \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\int_{|u,w|} f(z)\, dz = \int_0^1 f\big((1-t)u + tw\big)(w-u)\, dt$$

– das Integral über die Strecke von u nach w. Wegen der vorstehenden Bemerkung gilt

$$\int\limits_{|u,w|} f(z)\,dz = -\int\limits_{|w,u|} f(z)\,dz\ .$$

Ist jetzt $\varDelta = \varDelta(u,v,w)$ ein Dreieck in $\mathbb{C}$ mit den Ecken $u,v,w \in \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$\int\limits_{\varDelta} f(z)\,dz = \int\limits_{|u,v|} f(z)\,dz + \int\limits_{|v,w|} f(z)\,dz + \int\limits_{|w,u|} f(z)\,dz$$

für jede stetige Funktion $f : \varDelta \to \mathbb{C}$. Weiter sei $L(\varDelta) = |v-u| + |w-v| + |u-w|$ – die Kantenlänge des Dreiecks $\varDelta$.

Wir formulieren jetzt den Jordanschen Kurvensatz. Da die Aussage dieses Satzes intuitiv einleuchtend ist, soll auf die Durchführung eines Beweises verezichtet werden.

1.4.2 Satz: (Jordanscher Kurvensatz) *$\varphi : [a,\, b] \to \mathbb{C}$ sei eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve. Dann zerlegt φ das Komplement Ω von $\{\varphi\}$ in zwei zusammenhängende, disjunkte Teilmengen, die beide $\{\varphi\}$ als Rand besitzen.*

Wir zeigen jetzt die folgende Variante des Differentiationssatzes, der für die weiteren Überlegungen unverzichtbar ist.

1.4.3 Satz: *Es sei $\varphi : [a,\, b] \to \mathbb{C}$ ein Pfad mit $\{\varphi\} \subset \Omega$. Die Funktion $g : \{\varphi\} \to \mathbb{C}$ sei stetig. Für alle $z \in \Omega \setminus \{\varphi\}$ setzen wir*

$$f(z) = \int\limits_{\varphi} \frac{g(w)}{(w-z)}\,dw\ .$$

Dann ist f auf $\Omega \setminus \{\varphi\}$ analytisch, also durch Potenzreihen darstellbar. Speziell gilt

$$f^{(k)}(z) = k! \int\limits_{\varphi} \frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } z \in \Omega \setminus \{\varphi\}\ .$$

Beweis: Es sei $z_0 \in \Omega \setminus \{\varphi\}$ und dann $r > 0$ mit $\overline{K}(z_0,\, r) \cap \{\varphi\} = \emptyset$. Wir wählen $M > 0$ mit $|g(w)| \le M$ für alle $w \in \{\varphi\}$. Es sei $z \in K(z_0,\, r)$. Wegen $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} \le \frac{|z-z_0|}{r} < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{w-z_0}$ gleichmäßig für alle $w \in \{\varphi\}$. Daher sind in der folgenden Formel die Grenzprozesse vertauschbar, und es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \int\limits_{\varphi} \frac{g(w)}{w-z}\,dw = \int\limits_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g\big(\varphi(t)\big)\big(z-z_0\big)^n}{\big(\varphi(t)-z_0\big)^{n+1}} \Big) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int\limits_a^b \frac{g\big(\varphi(t)\big)}{\big(\varphi(t)-z_0\big)^{n+1}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int\limits_{\varphi} \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\ . \end{aligned}$$

Die weiteren Aussagen folgen aus 1.2.14. □

Ist jetzt von einer stetigen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F \in H(\Omega)$ bekannt, so kann man unmittelbar den Wert der Kurvenintegrale angeben:

1.4.4 Satz: *Es sei $F \in H(\Omega)$, und $f = F'$ sei stetig auf Ω. Für jeden Pfad $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\{\varphi\} \subset \Omega$ gilt dann*

$$\int_\varphi f(z)\,dz = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)\ .$$

Beweis: Aus der Substitutionsregel der Integrationstheorie folgt

$$\begin{aligned}\int \varphi f(z)\,dz &= \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_a^b F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_a^b \big(F \circ \varphi\big)'(t)\,dt = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big)\ .\end{aligned}$$

□

Speziell gilt also unter den obigen Voraussetzungen $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Pfad $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ mt $\{\varphi\} \subset \Omega$. Wenn wir jetzt voraussetzen, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist auf Ω, dann kann mit Hilfe des Satzes über die Existenz einer Stammfunktion 1.3.3 für eine sternförmige Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ gezeigt werden, dass f eine (komplex differenzierbare) Stammfunktion $F : \Omega \to \mathbb{C}$ besitzt: Wir setzen dazu $f = u + iv$ mit Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ und dann $g = (v, u)$, $h = (u, -v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen 1.2.12 sind die Voraussetzungen von 1.3.3 erfüllt. Es existieren reell–differenzierbare Funktionen $G, H : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $D\,G(x, y) = g(x, y)$, $D\,H(x, y) = h(x, y)$ für alle $(x, y) \in \Omega$, für $z = x + iy \in \Omega$ sei $F(z) = H(x, y) + iG(x, y)$. Wegen 1.2.12 ist F differenzierbar mit

$$F'(z) = D_x H(x, y) + iD_x G(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

für alle $z = x + iy \in \Omega$. Ist demnach Ω sternförmig, so gilt $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$ für alle $f \in H(\Omega)$ und alle geschlossenen Pfade $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\{\varphi\} \subset \Omega$. Wir zeigen jetzt mit einer relativ elementaren Konstruktion, dass für Dreiecke $\Delta \subset \Omega$ auf die Stetigkeit von f' verzichtet werden kann:

1.4.5 Satz: (Goursat) *Es seien $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ komplex differenzierbar. Für jedes Dreieck $\Delta = \Delta(u, v, w) \subset \Omega$ gilt*

$$\int_\Delta f(z)\,dz = 0\ .$$

Beweis: Wir nehmen im ersten Teil des Beweises an, dass $z_0 \notin \Delta$ gilt. Es sei $L(\Delta)$ die Kantenlänge des Dreiecks Δ. Wir betrachten jetzt die Dreiecke, die entstanden sind durch Hinzunahme der Mittelpunkte der Kanten:

$$\begin{aligned}&\Delta^1 = \Delta\big(u, \frac{u+v}{2}, \frac{u+w}{2}\big), \qquad \Delta^2 = \Delta\big(\frac{u+v}{2}, v, \frac{v+w}{2}\big),\ \ \Delta^3 = \Delta\big(\frac{v+w}{2}, w, \frac{u+w}{2}\big), \\ &\Delta^4 = \Delta\big(\frac{u+v}{2}, \frac{v+w}{2}, \frac{u+w}{2}\big)\ .\end{aligned}$$

Da die Strecken im Innern von Δ bei der Zerlegung jeweils zweimal auftauchen und dann in gegenläufiger Richtung, gilt

$$M := \int_{\Delta} f(z)\,dz = \int_{\Delta^1} f(z)\,dz + \int_{\Delta^2} f(z)\,dz + \int_{\Delta^3} f(z)\,dz + \int_{\Delta^4} f(z)\,dz\,.$$

Aus den Dreiecken $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$ wählen wir ein Dreieck $\Delta(1)$ aus mit

$$\Big| \int_{\Delta(1)} f(z)\,dz \Big| \geq \frac{|M|}{4}\,.$$

Wegen der Konstruktion gilt $L(\Delta(1)) = 2^{-1}L(\Delta)$.
Mit diesem Verfahren können wir rekursiv Dreiecke $\Delta(n+1) \subset \Delta(n) \subset \ldots \subset \Delta(1) \subset \Delta$ konstruieren mit

$$L(\Delta(n)) = 2^{-n}L(\Delta) \text{ und } \Big| \int_{\Delta(n)} f(z)\,dz \Big| \geq \frac{|M|}{4^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Satzes von Heine–Borel existiert ein $w_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(n)$. Da f in w_0 komplex differenzierbar ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $K(w_0, \delta) \subset \Omega$ und mit $\left| \frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} - f'(w_0) \right| < \varepsilon$ für alle $z \in K(w_0, \delta)$ mit $z \neq w_0$. Mit der Abkürzung $r(z) = f(z) - f(w_0) - f'(w_0)(z - w_0)$ erhalten wir im Fall $L(\Delta(n)) = 2^{-n}L(\Delta) < \delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
4^{-n}|M| \;\leq\; \Big| \int_{\Delta(n)} f(z)\,dz \Big| \;&=\; \Big| \int_{\Delta(n)} \Big(f(w_0) + f'(w_0)(z - w_0) + r(z)\Big)\,dz \Big| \\
&=\; \Big| \int_{\Delta(n)} r(z)\,dz \Big| \;\leq\; L(\Delta(n)) \max\{|r(z)| \mid z \in \Delta(n)\} \\
&\leq\; \varepsilon L(\Delta(n))^2 \;=\; 4^{-n}\varepsilon L(\Delta).
\end{aligned}$$

Damit folgt $|M| \leq \varepsilon L(\Delta)$ für alle $\varepsilon > 0$ also $M = 0$.

Fall $u = z_0$: Es sei $C > 0$ mit $|f(z)| < C$ für alle $z \in \Delta$. Wir wählen $\delta > 0$ und dann $v_1 \in |u, v|$, $w_1 \in |u, w|$ mit $0 < |v_1 - u|$, $|w_1 - u|$, $|v_1 - w_1| < \delta$. Wir setzen

$$\Delta_1 = \Delta(z_0, v_1, w_1),\; \Delta_2 = \Delta(v_1, v, w_1),\; \Delta_3 = \Delta(v, w, w_1)$$

und haben eine Zerlegung von Δ in drei Teildreiecke erhalten. Wegen des ersten Teils des Beweises gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} f(z)\,dz \;&=\; \int_{\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\Delta_2} f(z)\,dz + \int_{\Delta_3} f(z)\,dz = \int_{\Delta_1} f(z)\,dz + 0 + 0\,, \text{ also} \\
\Big| \int_{\Delta} f(z)\,dz \Big| \;&\leq\; L(\Delta_1)\,C \;\leq\; 3\delta\,C \to 0 \text{ bei } \delta \downarrow 0\,.
\end{aligned}$$

Fall $z_0 \in \Delta,\ z_0 \notin \{u,v,w\}$: Wir zerlegen Δ in die Dreiecke
$\Delta_1 = \Delta(u,v,z_0),\ \Delta_2 = \Delta(z_0,v,w),\ \Delta_3 = \Delta(z_0,w,u)$ und erhalten

$$\int\limits_{\Delta} f(z)\,dz = \int\limits_{\Delta_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Delta_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\Delta_3} f(z)\,dz = 0\,.$$

□

Als erste Konsequenz des Satzes von Goursat leiten wir jetzt die Existenz einer Stammfunktion einer holomorphen Funktion auf einem sternförmigen Gebiet her. Gemäß 5.5 heißt eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ sternförmig mit einem Sternzentrum $w_0 \in \Omega$, wenn $|w_0,\, z| \subset \Omega$ gilt für alle $z \in \Omega$. Der folgende Satz beinhaltet mit der Aussage iii) auch die konvexe Version des **Cauchyschen Integralsatzes**.

1.4.6 Satz: *$\Omega \subset \mathbb{C}$ sei ein sternförmiges Gebiet mit einem Sternzentrum $w_0 \in \Omega$.*

i) *Die Funktion $f : \Omega$ sei stetig und für alle Dreiecke $\Delta \subset \Omega$ gelte $\int\limits_{\Delta} f(w)\,dw = 0$. Für $z \in \Omega$ setzen wir*

$$F(z) = \int\limits_{|w_0,\, z|} f(w)\,dw\,.$$

Dann gilt $F \in H(\Omega)$ mit $F' = f$; F ist also eine Stammfunktion von f.

ii) *Zu jedem $f \in H(\Omega)$ existiert $F \in H(\Omega)$ mit $F' = f$.*

iii) *Für alle $f \in H(\Omega)$ und jeden geschlossenen Pfad $\varphi : [a,\, b] \to \mathbb{C}$ mit $\{\varphi\} \subset \Omega$ gilt*

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: i) Es seien $z_0 \in \Omega,\ r > 0$ mit $K(z_0, r) \subset \Omega$. Für alle $z \in K(z_0, r)$ gilt $|w_0,\, z| \subset \Omega$ und $\Delta = \Delta(w_0, z, z_0) \subset \Omega$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-z_0}\Big(F(z) - F(z_0)\Big) &= \frac{1}{z-z_0}\Big(\int\limits_{|w_0,\, z|} f(w)\,dw - \int\limits_{|w_0,\, z_0|} f(w)\,dw\Big)\\
&= \frac{1}{z-z_0}\Big(\int\limits_{|w_0,\, z|} f(w)\,dw + \int\limits_{|z_0,\, w_0|} f(w)\,dw\Big)\\
&= \frac{1}{z-z_0}\Big(\int\limits_{\Delta} f(w)\,dw - \int\limits_{|z,\, z_0|} f(w)\,dw\Big)\\
&= \frac{1}{z-z_0}\int\limits_{|z_0,\, z|} f(w)\,dw = \frac{1}{z-z_0}\int\limits_{|z_0,\, z|} \Big(f(w) - f(z_0)\Big)dw + f(z_0)\,.
\end{aligned}$$

Bei $z \to z_0$ gilt offenbar

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| \le \frac{1}{|z-z_0|} L(|z_0,\, z|)\max\{|f(w) - f(z_0)| \mid w \in |z_0,\, z|\} \to\ 0\,.$$

ii) Diese Aussage folgt mit i) aus dem Satz von Goursat 1.4.5 und iii) mit ii) aus Satz 1.4.4 .

□

Das folgende Beispiel ist wichtig für viele der nachfolgend durchgeführten Konstruktionen.

Darüber hinaus zeigt es, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$: $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion besitzen kann: Man beachte Satz 1.4.4. Auf die spezielle Gestalt des Gebietes kann also in dem obigen Satz 1.4.6 nicht verzichtet werden.

1.4.7 Beispiel: Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Der geschlossene Pfad $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Für alle $z \in K(z_0, r)$ gilt dann

$$\int_\varphi \frac{1}{w-z}\, dw \;=\; 2\pi\, i\ .$$

Beweis: Wir setzen für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| \leq 1$

$$g(t) = \int_\varphi \frac{1}{w - t(z-z_0) - z_0} dt\ .$$

Dann gilt

$$g(0) = \int_\varphi \frac{1}{w-z_0)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i\ .$$

Wegen 1.4.3 ist g differenzierbar und da φ eine geschlossene Kurve ist, gilt wegen 1.4.4

$$g'(t) = \int_\varphi \frac{(z-z_0)}{(w-t(z-z_0)-z_0)^2} dw = \int_\varphi \frac{d}{dw}\Big(\frac{-1(z-z_0)}{w-t(z-z_0)-z_0}\Big) dw = 0\ .$$

$\square$

1.4.8 Definition: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset \Omega$ heißt eine* **Komponente** *oder zusammenhangskomponente von Ω, Wenn A zusammenhängend ist, und A und $A^c \cap \Omega$ offen sind. Ω_∞ heißt die unbeschräkte Komponente von Ω, wenn sie die einzige nicht beschränkte Komponente von Ω ist.*

Offenbar sind die Komponenten genau die maximalen zusammenhängenden Teilmengen von Ω.

1.4.9 Satz: *$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sei ein geschlossener Pfad. Wir setzen $\Omega = \{\gamma\}^c$ und definieren den Index oder die Umlaufzahl*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, \mathrm{dw} \textit{ für alle } \mathrm{z} \in \Omega\ .$$

Die Funktion $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph auf Ω und nimmt nur Werte in $\mathbb{Z}$ an. Folglich ist Ind_γ auf jeder Komponente von Ω konstant mit $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) = 0$ für alle $z \in \Omega_\infty$.

Beweis: Da $\{\gamma\}$ kompakt ist, existiert die eindeutig bestimmte unbeschränkte Komponente Ω_∞ von Ω. Wegen Satz 1.4.3 ist mit $g(w) = 1$ für alle $w \in \Omega$ die Funktion $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ durch Potenzreihen darstellbar. Daher ist Ind_γ auf Ω holomorph und daher auch stetig. Weiter gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, \mathrm{dw} = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, \mathrm{dt}\ .$$

Weiter setzen wir für alle $t \in [\alpha, \beta]$

$$\varphi(t) = \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\Big) .$$

Man erkennt durch einfaches Nachrechnen, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) \in \mathbb{Z}$ äquivalent ist zu $\varphi(\beta) = 1$; denn für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ist $1 = \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^{iv} = \mathrm{e}^u(\cos v + i \sin v)$ äquivalent zu $u = 0$ und $v = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ also zu $\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$. Da γ ein Pfad ist, dürfen wir annehmen, dass γ in allen $t \in [\alpha, \beta]$ differenzierbar ist. (Ansonsten betrachten wir das Komplement einer endlichen Menge.) Für alle $t \in [\alpha, \beta]$ erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} .$$

Setzen wir weiter $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$, so erhalten wir aus der obigen Formel

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)\big(\gamma(t) - z\big) - \varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t) - z\big)^2} = 0 \ \text{ für alle } t \in [\alpha, \beta] .$$

ψ ist daher konstant, und aus $\varphi(\alpha) = 1$ folgt

$$\varphi(\beta) = \psi(\beta)\big(\gamma(\beta) - z\big) = \psi(\alpha)\big(\gamma(\beta) - z\big) = \frac{\big(\gamma(\beta) - z\big)}{\big(\gamma(\alpha) - z\big)} = 1 .$$

Damit haben wir $\mathrm{Ind}_\mathrm{z} \in \mathbb{Z}$ nachgewiesen.

Es sei jetzt $r > 0$ mit $\{\gamma\} \subset K(0, r)$. Für $w \in \{\gamma\}$ und $z \in \Omega_\infty$ sei $f_z(w) = \frac{1}{w - z}$. Im Fall $|z| > r + L(\gamma)$ erhalten wir $\|f_z\|\infty \leq \frac{1}{r + L(\gamma)}$ und damit $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{r + L(\gamma)}\,\mathrm{L}(\gamma) < 1$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{z}) = 0$ für alle $z \in \Omega_\infty$. □

1.4.10 Beispiel: (**Fresnel Integrale**) Es gilt

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} .$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ für $z \in \mathbb{C}$. Weiter sei $R > 0$ beliebig.

Für $t \in [0, R]$ seien $\varphi_R(t) = t$, $\rho_R(t) = \mathrm{e}^{\pi i/4}(R - t)$ und für $t \in [0, \pi/4]$ sei $\psi_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$. Aneinandergesetzt bilden φ_R, ψ_R, ρ_R einen geschlossenen Pfad. Wegen 1.4.5 iii) gilt daher

$$\int_{\varphi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw + \int_{\psi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw + \int_{\rho_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw \ = \ 0 .$$

Wir untersuchen jetzt diese Integrale einzeln: Wir setzen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ voraus; folglich haben wir

$$\int_{\varphi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw = \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ bei } R \rightarrow \infty .$$

Da die Funktion g; $g(t) = \cos(2t)$ auf $[0, \pi/4]$ konkav ist, folgt unmittelbar $\cos(2t) \geq 1 - \frac{4}{\pi}t$ für alle $t \in [0, \pi/4]$ und damit

$$\Big| \int_{\psi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw \Big| \;\leq\; \int_0^{\pi/4} \Big| \exp\big(-R^2 \mathrm{e}^{2it}\big) Ri\mathrm{e}^{it} \Big| dt \;=\; \int_0^{\pi/4} R\exp\big(-R^2\cos(2t)\big) dt$$

$$\leq\; R\int_0^{\pi/4} \exp\big(-R^2\big)\exp\big(\frac{4R^2 t}{\pi}\big) dt \;=\; R\mathrm{e}^{-R^2}\frac{\pi}{4R^2}\big(\mathrm{e}^{R^2} - 1\big) \;<\; \frac{\pi}{4R} \;\to\; 0$$

bei $n \to \infty$. Für den dritten Pfad ρ_R folgt

$$\int_{\rho_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dz \;=\; -\int_0^R \exp\Big(-\mathrm{e}^{i\pi/2}(R-t)^2\Big)\mathrm{e}^{i\pi/4}\, dt \;=\; -\int_0^R \mathrm{e}^{-is^2}(1+i)\frac{1}{2}\sqrt{2}\, ds$$

$$=\; -\frac{(1+i)}{2}\sqrt{2}\Big(\int_0^R \cos(s^2)\, ds - i\int_0^R \sin(s^2)\, ds\Big)\,.$$

Wegen
$$\int_{\varphi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw + \int_{\psi_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw + \int_{\rho_R} \mathrm{e}^{-w^2}\, dw \;=\; 0\,.$$

für alle $R > 0$ folgt beim Grenzübergang $R \to \infty$ daher

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{(1+i)}{2}\sqrt{2}\Big(\int_0^\infty \cos(s^2)\, ds - i\int_0^\infty \sin(s^2)\, ds\Big) = 0\,.$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteilen liefert daher unmittelbar die Behauptung. □

1.4.11 Beispiel: Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Für alle $0 \neq w \in \mathbb{C}$ sei $f(w) = \frac{\mathrm{e}^{iw^2}}{w}$. Für alle $r,\, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ definieren wir die Kurven $\varphi,\ \rho : [r,\, R] \to \mathbb{C}$: $\varphi(t) = t$ und $\rho(t) = i(R + r - t)$, sowie $\psi,\, \gamma : [0,\, \pi/2] \to \mathbb{C} : \psi(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$ und $\gamma(t) = i\,r\,\mathrm{e}^{-i\,t}$. Aneinandergesetzt bilden $\varphi, \psi, \rho, \gamma$ einen geschlossenen Pfad ϕ, so dass $\{\phi\}$ in einem konvexen Teil von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ enthalten ist. Wegen des Cauchyschen Integralsatzes 1.4.6 iii) gilt $\int_\phi f(w)\, dw = 0$. Wir betrachten jetzt die Integrale über die angegebenen Teilpfade: Es gilt

$$\int_\varphi f(w)\, dw + \int_\rho f(w)\, dw \;=\; \int_r^R \frac{\exp(it^2)}{t}\, dt + \int_r^R \frac{\exp(i\,i^2(R+r-t)^2)}{i(R+r-t)}(-i)\, dt$$

$$=\; \int_r^R \frac{\exp(it^2)}{t}\, dt - \int_r^R \frac{\exp(-is^2)}{s}\, ds \;=\; 2i\int_r^R \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt\,.$$

Es sei $0 < \delta < \frac{1}{2\pi}$ Wegen $\sin(2t) > 0$ für alle $t \in]0, \pi/2[$ folgt

$$\Big| \int_{\psi} f(w)\, dw \Big| \;\le\; \int_0^{\pi/2} \big| \exp(i\, R^2 e^{2it}) \big|\, dt \;=\; \int_0^{\pi/2} \exp\big(- R^2 \sin(2t)\big)\, dt$$

$$\le\; \delta + \int_{\delta}^{\pi/2} \exp\big(- R^2 \sin(2\delta)\big) dt \;\to\; 0 \;\text{ bei } R \to \infty\, .$$

Wegen des Mittelwertsatzes gilt $\big|\exp(-ir^2 e^{2it}) - 1\big| \le 2r^2 e^1$ für alle $0 \le t \le \pi/2$ und alle $0 < r < 1$. Wir erhalten

$$\Big| \int_{\gamma} f(w)\, dw + \frac{i\pi}{2} \Big| \le \int_0^{\pi/2} \big| \exp\big(i\, i^2\, r^2 e^{-2it}\big) - 1 \big|\, dt \;\to\; (-i) \int_0^{\pi/2} 1\, dt \to 0 \text{ bei } r \downarrow 0\, .$$

Zusammengenommen gilt

$$0 = \int_{\phi} f(w)\, dw = 2i \int_r^R \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt + \int_{\psi} f(w)\, dw + \int_{\gamma} f(w)\, dw \;\to\; 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt = -\frac{i\,\pi}{2}$$

bei $r \downarrow 0$ und $R \to \infty$, also i)

ii) folgt aus i) mit der Substitution $s = t^2$:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t^2)}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{\sqrt{s}}\, \frac{1}{2\sqrt{s}}\, ds = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s}\, ds\, .$$

□