Algebraische Geometrie II

Heinz Spindler

Reading Course

Sommersemester 2006

Inhaltsverzeichnis

I Schemata 3

1 Garben **4**

2 Schemata **49**

3 Eigenschaften von Schemata, Produkte **79**

4 Modulgarben **127**

Teil I

Schemata

1 Garben

1.1 Definition: (abelsche Prägarbe)

Es sei X ein topologischer Raum.

Eine *abelsche Prägarbe* auf X ist ein System $\mathscr{F} = (\mathscr{F}(U), \rho_{U,V})_{V \subset U \subset X \text{offen}}$, in dem jeder offenen Menge $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathscr{F}(U)$ zugeordnet ist und jedem Paar (U,V) offener Mengen $U,V \subset X$ mit $V \subset U$ ein Gruppenhomomorphismus $\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, so dass folgende Axiome erfüllt sind.

(i) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$,

(ii) $\rho_{U,U} = id_{\mathscr{F}(U)}$ für alle offenen Mengen $U \subset X$,

(iii) Sind $U,V,W \subset X$ offen mit $W \subset V \subset U$, so gilt

$$\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}.$$

Man kann diese Definition in der Sprache der Kategorien in folgender Form geben:

Es sei $\mathscr{T}_X$ die Kategorie, deren Objekte die offenen Mengen $U \subset X$ sind und deren Morphismen ausschließlich die Inklusionen $V \subset U$ sind, also $\hom(V,U) = \emptyset$, falls $V \not\subset U$ und $\hom(V,U) = \{i\}$, falls $V \subset U$ und $i : V \to U$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

Die Komposition von Morphismen ist die gewöhnliche Komposition von Abbildungen. Eine abelsche Prägarbe ist dann nicht anderes als ein kontravarianter Funktor

$$\mathscr{F} : \mathscr{T}_X \to \mathscr{A}b$$

von $\mathscr{T}_X$ in der Kategorie $\mathscr{A}b$ der abelschen Gruppen. Für $i \in \hom(V,U)$ ist $\rho_{U,V} = \mathscr{F}(i)$.

Ist weiter $j \in \hom(W,V)$, so ist $\rho_{V,W} = \mathscr{F}(j)$ und die Bedingung (iii) bedeutet dann gerade

$$\mathscr{F}(i \circ j) = \mathscr{F}(j) \circ \mathscr{F}(i).$$

Die Elemente aus $\mathscr{F}(U)$ werden *Schnitte* in $\mathscr{F}$ über der offenen Menge U genannt.

Oft wird die Gruppe der Schnitte von $\mathscr{F}$ über U auch mit $\Gamma(U,\mathscr{F})$ bezeichnet.

Das ist nur eine der älteren Literatur angepasste Notation:

$$\Gamma(U,\mathscr{F}) = \mathscr{F}(U).$$

Die Homomorphismen $\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ heißen Restriktionsabbildungen. Für $s \in \mathscr{F}(U)$ heißt $\rho_{U,V}(s) \in \mathscr{F}(V)$ die Einschränkung von s auf V. Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzt man die gewohnte Notation $s \mid V$ für die Einschränkung auf V:

$$s \mid V = \rho_{U,V}(s).$$

Es werden auch Prägarben auf X mit Werten in einer beliebigen Kategorie $\mathbb{C}$ betrachtet. Eine Prägarbe auf X mit Werten in $\mathbb{C}$ ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathscr{F} : \mathscr{T}_X \to \mathscr{C}.$$

Auf diese Weise erhält man den Begriff der Prägarbe von Mengen, Ringen, K-Algebren, usw.

1.2 Beispiel: Es sei X ein topologischer Raum. Für $U \subset X$ offen sei $C(U)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der reellen stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Ist $V \subset U$, $V \subset X$ offen, so ist die Restriktionsabbildung

$$\rho_{U,V} : C(U) \to C(V),\ f \mapsto f \mid V,$$

ein $\mathbb{R}$-Algebrahomomorphismus.

Damit ist C eine Prägarbe von $\mathbb{R}$-Algebren auf X. Diese Prägarbe hat zwei besondere Eigenschaften, die zum Ausdruck bringen, dass der Begriff der Stetigkeit ein lokales Konzept ist.

Es sei dazu $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ Vereinigung von offenen Menge $V_i \subset X$, welche beliebig "klein" sein können.

Die erste Eigenschaft ist aufgrund des Funktionsbegriffes trivial:

(1) Sind $f, g \in C(U)$ und gilt $f \mid V_i = g \mid V_i$ für alle $i \in I$, so folgt $f = g$.

Die zweite Eigenschaft ist bedeutungsvoller. Sie sagt, dass man aus lokalen Schnitten $s_i \in C(V_i)$ einen globalen Schnitt $s \in C(U)$ 'konstruieren' kann, sofern die naheliegenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind, präzise:

(2) Zu jeder Familie $(s_i) \in \prod\limits_{i \in I} C(V_i)$ mit $s_i \mid V_i \cap V_j = s_j \mid V_i \cap V_j$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $s \in C(U)$, so dass

$$s \mid V_i = s_i \text{ für alle } i \in I.$$

Die Eigenschaften (1), (2) sind für eine beliebige abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X im allgemeinen nicht erfüllt!

Prägarben, die (1) und (2) erfüllen, heißen Garben. Der Begriff der Garbe ist von fundamentaler Bedeutung für die Untersuchung des Wechselspiels 'lokal' - 'global'.

1.3 Definition: (abelsche Garbe)
Eine abelsche Prägarbe $\mathscr{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt *abelsche Garbe* genau dann, wenn die folgenden beiden Garbenaxiome erfüllt sind:

(G1) Es sei $U \subset X$ offen und $(V_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von U.

Dann ist die Abbildung

$$\alpha : \mathscr{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathscr{F}(V_i),$$

die $s \in \mathscr{F}(U)$ auf die Familie $(s \mid V_i)_{i \in I}$ abbildet, injektiv.

Ist $s \mid V_i = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0$.

(G2) Es sei $U \subset X$ offen und $(V_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von U. Dann gilt: Die kanonische Abbildung

$$\beta : \prod_{i \in I} \mathscr{F}(V_i) \to \prod_{(i,j) \in I^2} \mathscr{F}(V_i \cap V_j),$$

die $(s_i)_{i \in I}$ auf $(s_i \mid V_i \cap V_j - s_j \mid V_i \cap V_j)_{(i,j) \in I^2}$ abbildet hat das Bild von α als Kern, d.h. Ist $s_i \mid V_i \cap V_j = s_j \mid V_i \cap V_j$ für alle $(i, j) \in I^2$, so gibt es ein $s \in \mathscr{F}(U)$, so dass

$$s \mid V_i = s_i \text{ für alle } i \in I.$$

1.4 Beispiel: (a) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subset \mathbb{P}^n$ sei eine quasiprojektive integre K-Varietät. Dann ist die Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ auf X definiert durch

$$\mathscr{O}_X(U) = \{ f : U \to K \mid f \text{ ist regulär auf } U \}$$

für $U \subset X$ offen. $\rho_{U,V} : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$ ist die gewöhnliche Einschränkungsabbildung. $f : U \to K$ heißt regulär auf U, wenn f in jedem Punkt $p \in U$ regulär ist und f heißt regulär in p, wenn es eine offene Umgebung V von p in U gibt und eine rationale Funktion $r = \frac{F}{G}$ auf $\mathbb{P}^n$ mit homogenen Polynomen $F, G \in K[x_0, \ldots, x_n]$ vom selben Grad, so dass $G(q) \neq 0$ für alle $q \in V$ und

$$f(q) = \frac{F(q)}{G(q)} \text{ für alle } q \in V.$$

Diese Definition ist ‘lokal’ und somit ist $\mathscr{O}_X$ eine Garbe von K-Algebren.

(vgl.: Abschnitt 2.2 und 3.1 im Skriptum zur Algebraischen Geometrie 1)

(b) Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Durch

$$\mathscr{E}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^\infty\text{-Funktion}\}$$

wird eine Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren auf X definiert, die Garbe der C^∞-Funktionen auf X.

(c) Es sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe.

Die konstante Garbe A_X wird definiert durch

$$A_X(U) = \{f : U \to A \mid f \text{ ist lokal konstant}\}.$$

Dabei heißt eine Funktion $f : U \to A$ lokal konstant, wenn es eine offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von U gibt, so dass $f \mid V_i$ konstant ist für alle $i \in I$.

Die Garbenaxiome (G1), (G2) sind offensichtlich erfüllt. A_X ist also eine abelsche Garbe. Durch $\mathscr{F}(U) := A$, $\rho_{UV} = id_A$ für $\emptyset \neq V \subset U$ (und natürlich $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$, $\rho_{U\emptyset} = 0$) ist eine abelsche Prägarbe auf X erklärt.

Diese Prägarbe erfüllt das Axiom (G1) aber im allgemeinen nicht das Axiom (G2). Gibt es etwa zwei nichtleere offene Mengen $U,V \in X$ mit $U \cap V = \emptyset$, so müsste die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \times A & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & \mathscr{F}(U\cup V) & & \mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(V) & & \mathscr{F}(U\cap V) \end{array}$$

exakt sein, wenn auch (G2) gelten würde. Das ist aber im Fall $A \neq 0$ nicht der Fall!

(d) Es sei X eine quasiprojektive K-Varietät über einen algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Der Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen ist der Quotientenkörper des affinen Koordinatenrings A irgendeiner affinen offenen Menge $U \subset X$.

Dies ist unabhängig von der gewählten affinen offenen Menge $U \subset X$.

Da sich zwei nichtleere offene Menge $U,V \subset X$ stets schneiden, sind alle lokal konstanten Funktionen auf offenen Mengen $U \subset X$ konstant. Damit ist die Prägarbe $\mathscr{K}_X$ mit

$$\mathscr{K}_X(U) := K(X) \text{ für } \emptyset \neq U \subset X \text{ offen}$$

eine Garbe. $\mathscr{K}_X$ heißt die Garbe der rationalen Funktionen auf X.

Die Garbe der rationalen Funktionen auf X ist also eine konstante Garbe.

Wir kommen nun zum Begriff des *Halms* einer Prägarbe. Die Definition ist ein Beispiel eines *induktiven Limes* (Colimes).

Wir wollen kurz die abstrakte Definition vorstellen.

1.5 *Exkurs über Colimites*

Es seien $I, \mathscr{C}$ Kategorien und $F : I \to \mathscr{C}$ sei ein kovarianter Funktor. Wir definieren den kovarianten Funktor

$$\varinjlim_I F : \mathscr{C} \to \mathscr{S}ets$$

wie folgt:

(i) Ist X ein Objekt von $\mathscr{C}$, so ist $(\varinjlim_I F)(X) :=$

$$\{(\theta_i)_{i \in Ob(I)} \in \prod_{i \in Ob(I)} \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(F(i), X) \mid \forall \alpha \in \mathrm{hom}_I(i,j) : \theta_i = \theta_j \circ F(\alpha)\}$$

(ii) Ist $f : X \to Y$ Morphismus in $\mathscr{C}$, so ist

$$f_* = (\varinjlim_I F)(f) : (\varinjlim_I F)(X) \to (\varinjlim_I F)(Y)$$

die Abbildung

$$f_*((\theta_i)_{i \in ObI}) = (f \circ \theta_i)_{i \in Ob(I)}$$

Man definiert nun weiter:

Ein Objekt $\varinjlim_I F \in Ob(\mathscr{C})$ zusammen mit einer Familie $\rho = (\rho_i)_{i \in Ob(I)}$ von Morphismen

$$\rho_i : F(i) \to \varinjlim_I F$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[dd, "F(\alpha)"'] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\
& \varinjlim_I F \\
F(j) \arrow[ur, "\rho_j"'] &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ für alle $\alpha \in \mathrm{hom}(i,j), i,j \in Ob(I)$ heißt *induktiver Limes (Colimes)* von F genau dann, wenn folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Für alle Objekte X von $\mathscr{C}$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim_I F, X) & \to & (\varinjlim_I F)(X) \\
f & \mapsto & f_*(\rho)
\end{array}$$

eine Bijektion.

Wenn ein induktiver Limes von F existiert, ist er eindeutig (bis auf kanonische Isomorphie) durch die universelle Eigenschaft bestimmt. Natürlich existiert im allgemeinen der induktive Limes nicht!

Um ein Gefühl zu bekommen, wie man induktive Limites konstruiert, betrachten wir einige Beispiele.

1. Es sei $\mathscr{C} = \mathscr{A}b$ die Kategorie der abelschen Gruppen. I sei eine Kategorie, in der es aus außer den Identitäten keine Morphismen gibt. Das heißt: $Ob(I)$ ist eine Indexmenge und es gibt keinerlei Beziehung zwischen den Indizes.

   Ein kovarianter Funktor $F : I \to \mathscr{A}b$ ist nichts anderes als eine Familie $(A_i)_{i \in Ob(I)}$ von abelschen Gruppen A_i.

   Hier ist $\varinjlim_I F = \bigoplus_{i \in Ob(I)} A_i$ mit den kanonischen Inklusionen

   $$i_k : A_k \to \bigoplus_{i \in Ob(I)} A_i$$

2. In $\mathscr{C} = \mathscr{A}b$ gibt es beliebige Colimites. Dazu sei I eine Kategorie (vielleicht sollte man besser sagen: eine kleine Kategorie, d.h. $Ob(I)$ sollte eine Menge sein). Es sei ein kovarianter Funktor

   $$F : I \to \mathscr{A}b$$

   gegeben. Wir bilden die direkte Summe

   $$A = \bigoplus_{i \in Ob(I)} F(i)$$

   und die Inklusionen $i_k : F(k) \to A$ für $k \in Ob(I)$. Es sei nun $B \subset A$ die von den Elementen

   $$i_k(a) - i_m(F(\alpha)(a)) \in A$$

   erzeugte Untergruppe, wobei $k, m \in Ob(I)$, $\alpha \in \hom(k,m)$ und $a \in F(k)$.

   Es sei nun

   $$\varinjlim_I F := A/B$$

   und $\varphi_k = \pi \circ i_k$ für $k \in Ob(I)$, wobei $\pi : A \to A/B$ die Quotientenabbildung ist. Dann gilt $(\varinjlim_I F, (\varphi_i)_{i \in Ob(I)})$ ist der Colimes von F.

   Zum Beweis betrachten wir eine abelsche Gruppe C zusammen mit Homomorphismen

   $$\theta_i : F(i) \to C,$$

sodass
$$\theta_i = \theta_j \circ F(\alpha)$$
für alle $i, j \in Ob(I)$, $\alpha \in \hom(i, j)$.

Aufgrund der universellen Eigenschaft der direkten Summe gibt es genau einen Homomorphismus
$$\theta : A \to C$$
mit $\theta \circ i_k = \theta_k$ für alle $k \in Ob(I)$.

Für $\alpha \in \hom(k, m)$, $\alpha \in F(k)$ gilt dann
$$\theta(\iota_k(a) - \iota_m(F(\alpha)(a)) = \theta_k(a) - \theta_m(F(\alpha)(a)) = 0$$
und nach dem Homomorphiesatz wird der Homomorphismus
$$\widetilde{\theta} : B \to C$$
induziert mit $\widetilde{\theta} \circ \pi = \theta$.

3. Die Konstruktion des induktiven Limes ist besonders einfach, wenn die Kategorie I eine *filtrierende partiell geordnete Menge* $(I, \leq)$ ist.

   Eine *partiell geordnete* Menge $(I, \leq)$ (auch „poset“ genannt) ist eine Menge I zusammen mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation $\leq$.

   Man fasst dann $(I, \leq)$ auch als Kategorie I auf, wobei die Indizes $i \in I$ die Objekte von I sind und für $i, j \in I$ die Menge der Homomorphismen von i und j leer ist, wenn $i \not\leq j$ und genau aus dem Paar (i, j) besteht, wenn $i \leq j$ ist. $(I, \leq)$ heißt *filtrierend*, wenn es zu beliebigen $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, so dass
$$i \leq k \text{ und } j \leq k.$$
   Ein Funktor $F : I \to \mathscr{A}b$ besteht aus einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von abelschen Gruppen $A_i = F(i)$ und einer Familie $(\varphi_{ij})_{i \leq j}$ von Homomorphismen
$$\varphi_{ij} = F(i, j) : A_i \to A_j$$
   so dass
$$\begin{array}{rcll} \varphi_{ii} & = & id_{A_i} & \text{und} \\ \varphi_{ik} & = & \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} & \text{für alle } i \leq j \leq k \end{array}$$
   In dieser Situation kann man den induktiven Limes $\varinjlim_{i \in I} A_i$ wie folgt konstruieren:

   Zunächst bilde man die *disjunkte* Vereinigung
$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\}$$

Für (a,i), $(b,j) \in A$ setze man dann

$$(a,i) \sim (b,j) \iff \exists k \in I : i \leq k, j \leq k \text{ und } \varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(b)$$

Man sieht leicht, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf A definiert ist.

Wir zeigen die Transitivität:

Es seien $(a,i),(b,j)(c,k) \in A$ und es gelte $(a,i) \sim (b,j)$ und $(b,j) \sim (c,k)$. Dann gibt es Elemente $l,m \in I$, so dass

$$i \leq l, \quad j \leq l$$

und

$$\varphi_{il}(a) = \varphi_{jl}(b)$$

und so dass $j \leq m$, $k \leq m$ und

$$\varphi_{jm}(b) = \varphi_{km}(c)$$

Da I filtrierend ist, gibt es ein $n \in I$ mit $l \leq n$ und $m \leq n$ und es folgt

$$\begin{aligned} &\varphi_{in}(a) = \varphi_{ln} \circ \varphi_{il}(a) = \varphi_{ln} \circ \varphi_{jl}(b) = \\ &= \varphi_{jn}(b) = \varphi_{mn} \circ \varphi_{mn} \circ \varphi_{jm}(b) = \varphi_{mn} \circ \varphi_{km}(c) = \varphi_{kn}(c). \end{aligned}$$

Damit ist $(a,i) \sim (c,k)$.

Wir können den induktiven Limes dann als die Menge der Äquivalenzklassen definieren:

$$\varinjlim_{i \in I} A_i = A/\sim$$

Die Gruppenstruktur wird folgendermaßen definiert. Sind $x,y \in A/\sim$ Äquivalenzklassen so kann man Repräsentanten (a,i) von x und (b,j) von y wählen. Sodann kann man ein Element $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$ finden. Auch

$$(\varphi_{ik}(a),k),(\varphi_{jk}(b),k)) \text{ sind Repräsentanten}$$

von x und y. Man setzt

$$x + y := [\varphi_{ik}(a) + \varphi_{jk}(b),k].$$

Dabei bezeichnet $[a,i] \in A/\sim$ die Äquivalenzklasse von (a,i).

Man prüft leicht, dass diese Definition wohl definiert ist und $(A/\sim,+)$ eine abelsche Gruppe ist. Auch die universelle Eigenschaft des induktiven Limes kann man leicht beweisen.

Die Homomorphismen $\varphi : A_i \to A/\sim$ sind die Kompositionen der Inklusion $A_i \to A$, $a \mapsto (a,i)$, mit der Quotientenabbildung $A \to A/\sim$, also $\varphi_i(a) = [a,i]$.

1.6 Definition: (Halme einer Prägarbe)

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ eine abelsche Prägarbe auf X. Es sei $x \in X$. Mit $\mathfrak{U}_x$ bezeichnen wir das System aller offenen Umgebungen von x. Dann ist $(\mathfrak{U}_x, \supset)$ eine filtrierende partiell geordnete Menge. Der *Halm* $\mathscr{F}_x$ von $\mathscr{F}$ in Punkt x ist der induktive Limes der Einschränkung von $\mathscr{F}$ auf $\mathfrak{U}_x$:

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U).$$

Ein Element aus $\mathscr{F}_x$ wird also repräsentiert durch ein Paar (U,s), wobei U eine offene Umgebung von x und s ein Schnitt in $\mathscr{F}$ über U ist. Zwei Paare (U,s), (V,t) mit $s \in \mathscr{F}(U)$, $t \in \mathscr{F}(V)$, definieren dasselbe Element in $\mathscr{F}_x$, wenn eine offene Umgebung W von x existiert mit $W \subset U$, $W \subset V$, so dass

$$s \mid W = t \mid W.$$

Die Elemente in $\mathscr{F}_x$ heißen *Keime* von Schnitten von $\mathscr{F}$ im Punkt x.

Die Äquivalenzklasse $[U,s] \in \mathscr{F}_x$ von $s \in \mathscr{F}(U)$, $U \in \mathfrak{U}_x$ heißt der Keim von s in x und wird mit s_x bezeichnet.

Die dazugehörige Abbildung $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ bezeichne wir auch mit $\rho_{U,x}$.

$(\mathscr{F}_x, \rho_{U,x})_{U \in \mathfrak{U}}$ ist dann der induktive Limes von $(\mathscr{F}(U), \rho_{U,V})_{x \in V \subset U}$.

1.7 Beispiel: (a) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine integre quasiprojektive Varietät über K.

Es sei $K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen auf X. Die Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ auf X ist eine Garbe von K-Algebren, die man folgendermaßen definieren kann:

Für $U \subset X$ offen sei $\mathscr{O}_X(U)$ die K-Algebra der regulären Funktionen $f : U \to K$.

$\mathscr{O}_X(U)$ ist Unterring von $K(X)$.

Die Restriktionsabbildung $\rho_{UV} : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$ sind hier nichts anderes als die Inklusionen:

$$\mathscr{O}_X(U) \subset \mathscr{O}_X(V) \subset K(X), \quad V \subset U.$$

Damit ist auch klar, dass der Halm $\mathscr{O}_{X,x}$ die Vereinigung

$$\mathscr{O}_{X,x} = \bigcup_{U \ni x} \mathscr{O}_X(U)$$

ist. Da eine in x reguläre rationale Funktion in einer Umgebung von x regulär ist, besteht $\mathscr{O}_{X,x}$ genau aus den im Punkt x regulären rationalen Funktionen.

(b) Es sei $\mathscr{E}_X$ die Garbe der reellwertigen C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Halm $\mathscr{E}_{X,0}$ der Keime von C^∞-Funktionen in einer Umgebung von 0 eine lokale $\mathbb{R}$-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}(\mathscr{E}_{X,0}) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, wobei mit $x_i \in \mathscr{E}_{X,0}$ die Keime der Koordinatenfunktionen in 0 bezeichnet seien.

Die Taylorentwicklung von Funktionskeimen um 0 ergibt einen lokalen $\mathbb{R}$-Algebrahomorphismus

$$T : \mathscr{E}_{X,0} \to \mathbb{R}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$$

in den formalen Potenzenreihenring. Bekanntlich ist T weder surjektiv noch injektiv.

(c) Die Halme der Garbe der holomorphen Funktionen auf einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit sind zum konvergenten Potenzreihenring

$$K_n = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

isomorph. Diese Ringe sind wohlbekannt (siehe: Grauert/Remmert: Analytische Stellenalgebren, Grundlehren Band 176, Springer 1971).

(d) Die Halme der konstanten Garbe A_X auf einem topologischen Raum X sind isomorph zu A. Dazu sei für $U \in \mathfrak{U}_X$

$$\rho_{U,x} : A_X(U) \to A$$

die Auswertungsabbildung $\rho_{U,X}(s) = s(x)$.

Wir müssen zeigen, dass der Auswertungshomomorphismus

$$A_{X,x} \to A, \quad s_x \mapsto s(x), \quad s \in A_X(U),$$

ein Isomorphismus ist.

Zur Injektivität: Es sei $s(x) = 0$. Dann gibt es eine Umgebung V von x, so dass $s \mid V = 0$, denn $s : U \to A$ ist ja lokal konstant.

Damit ist s_x, der Keim von s in x, ebenfalls Null!

Zur Surjektivität: Für $a \in A$, wähle man den Keim s_x des konstanten Schnittes $s : X \to A$, $s(y) = a$ für alle $y \in X$. s_x wird natürlich auf a abgebildet.

1.8 Definition: (Morphismus von Prägarben und Garben)

Es seine $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ abelsche Prägarben auf X. Ein Morphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ besteht aus einer Familie $(\varphi(U))_{U \subset X \text{ offen}}$ von Homomorphismen

$$\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U),$$

die in folgender Weise mit Restriktionen verträglich sind: Für alle $V \subset U \subset X$ offen gilt

$$\rho_{UV} \circ \varphi(U) = \varphi(V) \circ \rho_{UV}.$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"'] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

ist also kommutativ. Noch kürzer kann man schreiben: Für $s \in \mathscr{F}(U)$ gilt

$$\varphi(U)(s)\mid_V = \varphi(V)(S \mid V).$$

Sind $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ Morphismen, so wird $\psi \circ \varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ natürlich durch

$$(\psi \circ \varphi) := \psi(U) \circ \varphi(U)$$

definiert. Man sieht sofort, dass damit die Menge der abelschen Prägarben auf X zusammen mit Morphismen von Prägarben eine Kategorie ist. Wir nennen sie $\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)$. Mit $\mathscr{A}b(X)$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie der abelschen Garben. Die Menge der Morphismen $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ zwischen zwei abelschen Prägarben bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

Ein Homomorphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induziert aufgrund der universellen Eigenschaft der induktiven Limites für jeden Punkt $x \in X$ einen Homomorphismus

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

der Halme: Ist U offene Umgebung von x und $s \in \mathscr{F}(U)$, so ist

$$\varphi_x(s_x) := (\varphi(U)(s))_x.$$

1.9 Lemma: Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ abelsche Prägarben auf X.

(a) $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ ist in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe. Man setzt für $U \subset X$ offen, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(U) = \varphi_1(U) + \varphi_2)(U)$$

Es gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} \psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) &= \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2 \\ (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \theta &= \varphi_1 \circ \theta + \varphi_2 \circ \theta \end{aligned}$$

wobei $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$, $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathscr{H}, \mathscr{F})$.

(b) Die Nullgarbe 0_X auf X ist sowohl terminal als auch initial in $\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)$, d.h.

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, 0_X) = 0, \quad \mathrm{Hom}(0_X, \mathscr{F}) = 0.$$

(c) Man definiert die direkte Summe $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ der Prägarben $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ durch

$$(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G})(U) = \mathscr{F}(U) \oplus \mathscr{G}(U).$$

Man hat kanonische Homomorphismen

$$p : \mathscr{F} \oplus \mathscr{G} \to \mathscr{F},\ q : \mathscr{F} \oplus \mathscr{G} \to \mathscr{G},\ i : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \oplus \mathscr{G},\ j : \mathscr{G} \to \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$$

mit $p \circ i = id$, $q \circ j = id$, $i \circ p + j \circ q = id$, $p \circ j = 0$, $q \circ i = 0$.

$(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}, p, q)$ ist die *Produkt* von $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in der Kategorie $\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)$ und

$(\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}, i, j)$ ist die *Summe* (Coprodukt) von $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in der Kategorie $\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)$

Das Lemma besagt, dass $\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)$ eine *additive Kategorie* ist (siehe [G/M] II, §5).

Sind $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ abelsche Garben, so ist auch $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ eine abelsche Garbe. Die Kategorie $\mathscr{A}b(X)$ ist ebenfalls eine additive Kategorie.

Beweis: Übung. □

1.10 Proposition: Ein Morphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ von abelschen Garben ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $x \in X$ der induzierte Homomorphismus $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ ein Isomorphismus ist.

Beweis: Die Richtung „⇒“ ist klar. Dies gilt auch, wenn $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ nur Prägarben sind.

Der nicht triviale Teil des Satzes ist die andere Richtung. Hier wird wesentlich benutzt, dass $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ Garben sind.

Es sei jetzt also $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ Isomorphismus für alle $x \in X$. Es sei $U \subset X$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ ein Isomorphismus ist.

Zur Injektivität von $\varphi(U)$:

Es sei $s \in \mathscr{F}(U)$ und $\varphi(U)(s) = 0$.

Für $x \in U$ gilt dann $\varphi_x(s_x) = (\varphi(U)(s))_x = 0$. Da φ_x injektiv ist, ist $s_x = 0$.

Zu jedem $x \in U$ gibt es dann eine offene Umgebung V_x von x in U, so dass $s \mid V_x = 0$. Nach der Garbeneigenschaft (G1) für $\mathscr{F}$ folgt $s = 0$. $\varphi(U)$ ist also injektiv.

Zur Surjektivität von $\varphi(U)$:

Es sei $t \in \mathscr{G}(U)$. Für $x \in U$ ist dann $t_x = \varphi_x(s_x)$ für ein geeignetes $s_x \in \mathscr{F}_s$, denn φ_x ist nach Voraussetzung surjektiv. Es gibt zu x eine offene Umgebung V_x von x in U und ein $\sigma_x \in \mathscr{F}(V_x)$, so dass

$$(\sigma_x)_x = s_x$$

und somit ist

$$(\varphi(V_x)(\sigma_x))_x = \varphi_x((\sigma_x)_x) = \varphi_x(s_x) = t_x$$

und wir können V_x eventuell verkleinern, sodass

$$\varphi(V_x)(\sigma_x) = t \mid V_x.$$

Es folgt für $x, y \in U$

$$\begin{aligned}&\varphi(V_x \cap V_y)(\sigma_x \mid V_x \cap V_y) = \varphi(V_x)(\sigma_x) \mid V_x \cap V_y = \\ &= t \mid V_x \cap V_y = \varphi(V_y)(\sigma_y) \mid V_x \cap V_y = \varphi(V_x \cap V_y)(\sigma_Y(V_x \cap V_y).\end{aligned}$$

Da $\varphi(V_x \cap V_y)$ injektiv ist, folgt

$$\sigma_x \mid V_x \cap V_y = \sigma_y \mid V_x \cap V_y.$$

Nach der Eigenschaft (G2) für $\mathscr{F}$ gibt es somit einen Schnitt $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ mit

$$\sigma \mid V_x = \sigma_x \text{ für alle } x \in U.$$

Es folgt dann

$$\varphi(U)(\sigma) \mid V_x = \varphi(V_x)(\sigma \mid V_x) = \varphi(V_x)(\sigma_x) = t \mid V_x.$$

Nach der Eigenschaft (G1) für $\mathscr{G}$ folgt

$$\varphi(U)(\sigma) = t.$$

Damit ist $\varphi(U)$ surjektiv. $\square$

1.11 Definition: Es sei $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus abelscher Prägarben. Der Prägarbenkern von φ ist die Prägarbe $\ker \varphi$ mit

$$(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi(U) \quad \text{für alle } U \subset X \text{ offen.}$$

Der Prägarbencokern von φ ist die Prägarbe $\widetilde{\mathrm{coker}} \varphi$ mit

$$(\widetilde{\mathrm{coker}} \varphi)(U) := \mathrm{coker}\, \varphi(U) \quad \text{für alle } U \subset X \text{ offen.}$$

Die Restriktionsabbildung $\rho_{UV}: \operatorname{coker}\varphi(U) \to \operatorname{coker}\varphi(V)$ wird von der Restriktionsabbildung $\rho_{U,V}: \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(V)$ induziert.

Schließlich definiert man das Prägarbenbild $\widetilde{\mathrm{im}\varphi}$ von φ durch

$$(\widetilde{\mathrm{im}\varphi})(U) := \operatorname{im}\varphi(U).$$

Sind $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ Garben, so ist $\ker\varphi$ ebenfalls eine Garbe. Aber $\widetilde{\mathrm{coker}\varphi}$ und $\widetilde{\mathrm{im}\varphi}$ sind im allgemeinen keine Garben.

Wir betrachten einige Beispiele.

1.12 Beispiel: (a) Es sei X eine integre quasiprojektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Es sei $\mathscr{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X und $\mathscr{K}_X$ sei die konstante Garbe der rationalen Funktionen auf X.

Die Inklusionen $\mathscr{O}_X(U) \subset K(X) = \mathscr{K}_X(U)$ definieren einen Morphismus

$$\varphi : \mathscr{O}_X \to \mathscr{K}_X.$$

Dann ist $\widetilde{\mathrm{coker}\varphi}$ im allgemeinen keine Garbe. Es gilt

$$(\widetilde{\mathrm{coker}\varphi})(U) = K(X)/\mathscr{O}_X(U)$$

$\widetilde{\mathrm{coker}\varphi}$ erfüllt (G1), aber (G2) im allgemeinen nicht.

Es sei $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$, $V_i \subset X$ offen und es seien Elemente $s_i \in (\widetilde{\mathrm{coker}\varphi})(V_i)$ gegeben mit

$$s_k \mid V_i \cap V_j = s_j \mid V_i \cap V_j \text{ für alle } i, j \tag{$*$}$$

Nach Definition von $\widetilde{\mathrm{coker}\varphi}$ gibt es rationale Funktionen $r_i \in K(X)$, so dass

$$s_i = (r_i \bmod \mathscr{O}_X(V_i))$$

Die Bedingung $(*)$ besagt dann, dass

$$f_{ij} := r_j - r_i \in \mathscr{O}(V_i \cap V_j) \tag{$**$}$$

Ein System rationaler Funktionen $r_i \in K(X)$ mit der Eigenschaft $(**)$ nennt man auch ein Cousin-I-Verteilung auf U zur Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$. Eine *Lösung* der Verteilung (r_i) ist eine rationale Funktion $r \in K(X)$ mit

$$r - r_i \in \mathscr{O}_X(V_i) \text{ für alle } i \in I.$$

Für den Schnitt $s = (r \bmod \mathscr{O}_X(U)) \in (\widetilde{\mathrm{coker}})\varphi(U)$ gilt dann $s \mid V_i = s_i$ für alle $i \in I$.

Es ist ein subtiles Problem, Bedingungen für die Existenz von Lösungen zu finden. Für $X = \mathbb{P}^n$ ist die Cousin-I-Verteilung lösbar. (Das wird später bewiesen.)

Wir betrachten den einfachsten Fall einer projektiven Varietät mit nicht lösbaren Cousin-I-Verteilungen:

Es sei $X \subset \mathbb{P}^2$ die elliptische Kurve mit der Gleichung

$$y^2 z - (x - e_1 z)(x - e_2 z)(x - e_3 z) = 0.$$

Wir betrachten die offene Überdeckung

$$X = V_0 \cup V_1$$

mit $V_0 = X \setminus \{[e_1, 0, 1]\}$, $V_1 = X \setminus \{[e_2, 0, 1], [e_3, 0, 1]\}$ Es sei weiter

$$r_0 = 0 \text{ und } r_1 = \frac{z}{y}$$

Dann ist (r_0, r_1) eine Cousin-I-Verteilung auf X zur Überdeckung (V_0, V_1), denn

$$r_1 - r_0 = \frac{z}{y} \text{ ist regulär auf } V_0 \cap V_1 = \{y \neq 0\}.$$

Wäre diese Verteilung lösbar, so gäbe es eine rationale Funktion r auf X, so dass

$$\begin{array}{ll} r = r - r_0 & \text{regulär auf } V_0 \text{ und} \\ r - r_1 & \text{regulär auf } V_1 \end{array}$$

r hätte dann höchstens im Punkt $[e_1, 0, 1]$ einen Pol und zwar von derselben Ordnung wie r_1, denn $r - r_1$ ist regulär in $[e_1, 0, 1]$. Man sieht leicht, dass $\frac{y}{z}$ ein Erzeuger des maximalen Ideals von $\mathscr{O}_{X,[e_1,0,1]}$ ist, r_1 also in $[e_1, 0, 1]$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Die induzierte reguläre Abbildung

$$r : X \to \mathbb{P}^1$$

wäre demnach ein Isomorphismus im Widerspruch zu der Tatsache, dass X *nicht* rational ist.

Bemerkung: Elliptische Kurven sind bekanntlich Tori $\mathbb{C}/\Lambda$ und rationale Funktionen entsprechen den doppelt periodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ bzgl. des Gitters Λ.

Diese Funktionen heißen *elliptische Funktionen*. Man kann elementar zeigen, dass die Anzahl der Polstellen in einem Fundamentalbereich (Periodenparallelogramm) mit Vielfachheiten gezählt stets größer als 1 ist (siehe: Hurwitz: Vorlesung über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Seiten 143,144).

(b) Ein Beispiel aus der Funktionentheorie.

Es sei $\mathscr{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

$\mathscr{O}^{\times}$ sei die Garbe der nirgends verschwindenden holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

Für $U \subset \mathbb{C}$ offen ist die Abbildung

$$f \mapsto e^{2\pi i f}$$

ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi(U) : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}^{\times}(U),$$

d.h. es gilt $\varphi(U)(f+g) = \varphi(U)(t) \cdot \varphi(U)(g)$. Wir erhalten den Garbenhomomorphismus

$$\varphi : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^{\times}.$$

Der Kern $\ker\varphi$ ist die konstante Garbe $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}$, denn es gilt: $e^{2\pi i f} = 1 \iff f : U \to \mathbb{Z}$ ist stetig, also lokal konstant.

Wir zeigen: Der Prägarbencokern $\mathscr{F}$ der Inklusion $\iota : \mathbb{Z}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{O}$ ist keine Garbe. Nach Definition ist

$$\mathscr{F}(U) = \mathscr{O}(U)/\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(U)$$

die Gruppe der holomorphen Funktionen auf U modulo der Untergruppe der lokal konstanten $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf U.

Es sei $U = \mathbb{C}\backslash 0$ die im Nullpunkt gelochte komplexe Ebene. U wird überdeckt von zwei einfach zusammenhängenden Gebieten $V_1, V_2 \subset U$, etwa durch

$$V_1 = \mathbb{C}\backslash[0,\infty]$$

der längs der positiven reellen Achse geschlitzten Ebene und durch

$$V_2 = \mathbb{C}\backslash[-\infty,0]$$

der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene.

Wir beweisen, dass die Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}(V_1) \times \mathscr{F}(V_2) \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}(V_1 \cap V_2)$$

mit $\alpha(s) := (s \mid V_1, s \mid V_2)$, $\beta(s_1, s_2) := s_1 \mid V_1 \cap V_2 - s_2 \mid V_1 \cap V_2$ nicht exakt ist und folglich $\mathscr{F}$ keine Garbe ist.

Dazu sie $F_1 \in \mathscr{O}(V_1)$ ein Zweig des komplexen Logarithmus, etwa

$$F_1(z) = \int_i^z \frac{dt}{t},$$

wobei der Integrationsweg ganz in V_1 verläuft. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist die Definition unabhängig vom gewählten Weg.

Entsprechend definiert man $F_2 \in \mathscr{O}(V_2)$ durch

$$F_2(z) = \int_i^z \frac{dt}{t},$$

wobei jetzt der Integrationsweg ganz in V_2 verlaufen muss.

Offensichtlich gilt dann für Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z > 0$

$$F_1(z) = F_2(z),$$

denn man kann den Integrationsweg ganz in $V_1 \cap V_2$ wählen, da z in der Zusammenhangskomponente W von $V_1 \cap V_2$ liegt, die i enthält

i z

W

0

Abbildung 1:

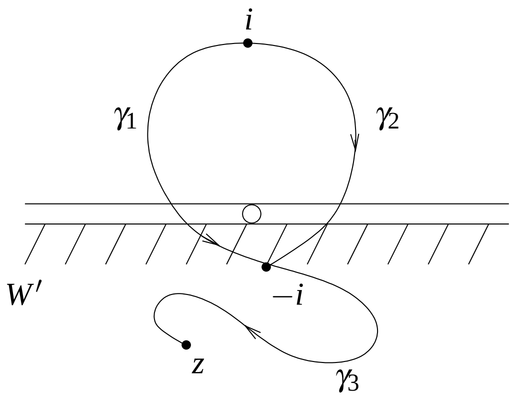


Abbildung 2:

Für $z \in W' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ gilt jedoch, wobei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wie in Abbildung 2 gewählt sind: $\int\limits_{\gamma_3} \frac{dt}{t} = \int\limits_{-i}^{z} \frac{dt}{t}$ und

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \int\limits_i^z \frac{dt}{t} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{dt}{t} + \int\limits_{-i}^z \frac{dt}{t}, \\ F_2(z) &= \int\limits_i^z \frac{dt}{t} = \int\limits_{\gamma_2} \frac{dt}{t} + \int\limits_{-i}^z \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

und folglich ist

$$F_2(z) - F_1(z) = \int\limits_{\gamma_2} \frac{dt}{t} - \int\limits_{\gamma_1} \frac{dt}{t} = \oint\limits_{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{dt}{t} = -2\pi i.$$

Man setze nun

$$\begin{aligned} s_1 &:= \frac{1}{2\pi i} F_1 \bmod \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(V_1) \in \mathscr{F}(V_1) \\ s_2 &:= \frac{1}{2\pi i} F_2 \bmod \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(V_2) \in \mathscr{F}(V_2). \end{aligned}$$

Die obige Rechnung zeigt, dass

$$s_1 \mid V_1 \cap V_2 = s_2 \mid V_1 \cap V_2$$

denn: $\frac{1}{2\pi i} F_1 = \frac{1}{2\pi i} F_2$ auf W und $\frac{1}{2\pi i} F_1 = \frac{1}{2\pi i} F_2 + 1$ auf W'.

Wäre nun $\mathscr{F}$ eine Garbe, so müsste es eine holomorphe Funktion

$$F \in \mathscr{O}(U)$$

geben, so dass

$$\begin{array}{rcl} F \mid V_1 & = & F_1 + 2\pi i k_1 \text{ und} \\ F \mid V_2 & = & F_2 + 2\pi i k_2 \end{array}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ und folglich wäre

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{z} \text{ für alle } z \in U.$$

Für die Kreislinie $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, hätte man dann den Widerspruch

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma dF(z) = \int_0^1 dF(e^{2\pi i t})$$
$$= F(e^{2\pi i}) - F(e^0) = F(1) - F(1) = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathscr{F}$ keine Garbe ist. (G2) ist verletzt.

Nach dem Homomorphiesatz erhält man für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ einen injektiven Homomorphismus

$$\psi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{O}^\times(U)$$

mit $\psi(U)(f \bmod \mathbb{Z}_\mathbb{C}(U)) := e^{2\pi i f}$.

Damit erhalten wir einen Morphismus

$$\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{O}^\times.$$

Für $U = \mathscr{F} \setminus 0$ ist $\psi(U)$ nicht surjektiv, denn mit obigen Bemerkungen gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & \psi(V_1)(s_1) & = & e^{F_1} = id_{V_1} \\ \text{und} & \psi(V_2)(s_2) & = & e^{F_2} = id_{V_2} \end{array}$$

Die Funktion $id_U \in \mathscr{O}^\times(U)$ liegt somit nicht im Bild von $\psi(U)$.

Für alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ ist aber die Halmabbildung

$$\psi_z : \mathscr{F}_z \to \mathscr{O}_z^\times$$

ein Isomorphismus. Das zeigt, dass in Proposition 1.10 die Voraussetzung, dass $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ Garben sind, wesentlich ist.

Zum Beweis der Isomorphie von ψ_Z genügt es zu zeigen, dass für jede offene Kreisscheibe $U \subset \mathbb{C}$ die Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O}(U) \stackrel{\varphi(U)}{\to} \mathscr{O}^\times(U) \to 0$$

exakt ist. Es sei dazu $h \in \mathscr{O}^\times(U)$. Dann ist $\frac{h'}{h} \in \mathscr{O}(U)$ und da U eine Kreisscheibe ist, gibt es eine Stammfunktion $f \in \mathscr{O}(U)$ von $\frac{1}{2\pi i}\frac{h'}{h}$. Sei $g = e^{2\pi i f}$. Dann gilt $g' = 2\pi i f' e^{2\pi i f} = 2\pi i f' g = \frac{h'}{h} g$, also gibt es eine Funktion a mit

$$g = ah \text{ und } g' = ah'.$$

Ableiten der ersten Gleichung ergibt

$$g' = a'h + ah'.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$a'h = 0.$$

Da h ohne Nullstellen ist, folgt

$$a' = 0$$

und somit ist a eine Konstante in $\mathbb{C}^\times$, $a = e^{2\pi ib}$, $b \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$f - b \in \mathscr{O}(U)$$

und $e^{2\pi i(f-b)} = \frac{g}{a} = h$. Das zeigt die Surjektivität von $\varphi(U)$.

Die Beispiele zeigen, dass es Prägarben $\mathscr{F}$ gibt, die keine Garben sind und dass eventuell eine Garbe $\mathscr{G}$ existiert zusammen mit einem Morphismus $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, der in jedem Punkt x einen Isomorphismus $\psi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ induziert. $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ unterscheiden sich also lokal nicht, wohl aber global.

Die folgende Konstruktion ist sehr wichtig für die Garbentheorie. Sie beschreibt den Prozess der "Vergarbung" einer Prägarbe ("Sheafification"). Damit hat man die Möglichkeit neben Kernen auch Bilder und Cokerne von Morphismen in der Kategorie der abelschen Garben zu konstruieren.

1.13 Proposition: Es sei $\mathscr{F}$ eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Dann gibt es eine abelsche Garbe $\mathscr{F}^+$ auf X zusammen mit einem Morphismus $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist $\mathscr{G}$ eine abelsche Garbe und $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus, so gibt es genau einen Morphismus $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$, so dass $\varphi = \psi \circ \theta$. Hierdurch ist das Paar $(\mathscr{F}^+, \theta)$ bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt. $(\mathscr{F}^+, \theta)$ heißt die zur Prägarbe $\mathscr{F}$ assoziierte Garbe.

Beweis: Die Konstruktion von $\mathscr{F}^+$:

Es sei $U \subset X$ offen. $\mathscr{F}^+(U)$ sei die Menge aller Familien $\sigma = (\sigma_x)_{x \in U} \in \prod\limits_{x \in U} \mathscr{F}_x$ mit der folgenden Eigenschaft

($*$) Für jeden Punkt $a \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von a in U und einen Schnitt $t \in \mathscr{F}(V)$, so dass $t_x = \sigma_x$ für alle $x \in V$.

Man sieht leicht, dass $\mathscr{F}^+(U)$ eine Untergruppe von $\prod\limits_{x \in U} \mathscr{F}_x$ ist und dass $\mathscr{F}^+$ mit den natürlichen Restriktionsabbildungen eine abelsche Prägarbe ist.

Für $U \subset X$ offen sei $\theta(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}^+(U)$ die natürliche Abbildung $\theta(U)(s) = (s_x)_{x \in U}$, die jedem Schnitt $s \in \mathscr{F}(U)$ die Familie seiner Keime s_x in den Punkten $x \in U$ zuordnet. Dann ist $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ ein Morphismus. Wir zeigen, dass $\mathscr{F}^+$ eine Garbe ist. Der Nachweis von (G1) ist einfach:

Es sei $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ und $\sigma = (\sigma_x)_{x \in U} \in \mathscr{F}^+(U)$ mit $\sigma \mid V_i = 0$ für alle $i \in I$, d.h. $\sigma_x = 0$ für alle $x \in V_i$ und alle $i \in I$. Also ist $\sigma_x = 0$ für alle $x \in U$ und das heißt $\sigma = 0$.

Zu (G2): Auch das ist einfach.

Sei $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ und $\sigma_i = (\sigma_{i,x})_{x \in V_i} \in \mathscr{F}^+(V_i)$.

Es gelte

$$\sigma_i \mid V_i \cap V_j = \sigma_j \mid V_i \cap V_j$$

also $\sigma_{i,x} = \sigma_{j,x}$ für alle $x \in V_i \cap V_j$. Dann ist $\sigma = (\sigma_x)_{x \in U} \in \prod\limits_{x \in U} \mathscr{F}_x$, wobei

$$\sigma_x := \sigma_{i,x} \text{ falls } x \in V_i.$$

Offensichtlich erfüllt σ auch die Bedingung ($*$) und somit ist $\sigma \in \mathscr{F}^+(U)$.

Nach Definition ist $\sigma \mid V_i = \sigma_i$ für alle $i \in I$. Damit ist (G2) erfüllt.

Wir kommen zum Nachweis der universellen Eigenschaft:

Es sei $\mathscr{G}$ eine abelsche Garbe und $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus. Dann kann man

$$\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$$

wie folgt definieren. Für $U \subset X$ offen, $\sigma = (\sigma_x)_{x \in U} \in \mathscr{F}^+(U)$ sei $t = \psi(U)(\sigma) \in \mathscr{G}(U)$ der Schnitt mit $t_x = \varphi_x(\sigma_x)$ für $x \in U$.

Dadurch ist in der Tat ein Schnitt $t \in \mathscr{G}(U)$ festgelegt, denn wegen ($*$) gibt es eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von U und Schnitte $s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ mit

$$s_{i,x} = \sigma_x \text{ für alle } x \in V_i, i \in I.$$

Für $t_i := \varphi(V_i)(s_i) \in \mathscr{G}(V_i)$ gilt dann, da $\mathscr{G}$ das Axiom (G1) erfüllt

$$t_i \mid V_i \cap V_j = t_j \mid V_i \cap V_j.$$

Da $\mathscr{G}$ auch (G2) erfüllt, gibt es genau ein $t \in \mathscr{G}(U)$ mit $t \mid V_i = t$ für alle $i \in I$.
Nach Konstruktion der Halmabbildung φ_x ist dann $\varphi_x(\sigma_x) = (\varphi(V_i)(s_i))_x = t_{i,x} = t_x$ für alle $x \in V_i$.
Damit ist der Morphismus $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ definiert. Es gilt $\varphi = \psi \circ \theta$. Durch diese Eigenschaft ist ψ eindeutig bestimmt, denn ist $\psi' : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ ein weiterer Morphismus mit $\psi \circ \theta = \psi' \circ \theta$, so ist für alle $x \in X$, wegen $\mathscr{F}_x^+ = \mathscr{F}_x$ und $\theta_x = id_{\mathscr{F}_x}$,

$$\psi_x = \psi'_x$$

und somit $\psi = \psi'$.
Zwei Garbenhomomorphismen stimmen nämlich genau dann überein, wenn alle Halmabbildungen übereinstimmen: $\psi = \psi' \iff \forall x \in X \colon \psi_x = \psi'_x$
(Übung) $\square$

Bemerkung: Die Operation $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^+$ ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der abelschen Prägarben in die Kategorie der abelschen Garben auf X

$$\mathscr{A}b\mathscr{P}(X) \to \mathscr{A}b(X).$$

Dieser Funktor ist *linksadjungiert* zur 'Inklusion'

$$\iota : \mathscr{A}b(X) \to \mathscr{A}b\mathscr{P}(X).$$

Man hat einen natürlichen Homomorphismus

$$\alpha : (\iota(\mathscr{G}))^+ \to \mathscr{G}$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\mathscr{A}b\mathscr{P}(X)}(\mathscr{F}, \iota(\mathscr{G})) & \to & \hom_{\mathscr{A}b(X)}(\mathscr{F}^+, \mathscr{G}) \\ \varphi & \mapsto & \alpha \circ \varphi^+ \end{array}$$

eine Bijektion ist, wobei $\mathscr{F}$ Prägarbe und $\mathscr{G}$ Garbe ist. Wegen der universellen Eigenschaft von

$$\theta : \iota(\mathscr{G}) \to (\iota(\mathscr{G}))^+$$

gibt es genau ein $\alpha : (\iota(\mathscr{G}))^+ \to \mathscr{G}$ mit $\alpha \circ \theta = id_{\mathscr{G}}$.
Wichtig ist: Für eine Prägarbe $\mathscr{F}$ und eine Garbe $\mathscr{G}$ entsprechen sich Morphismen

$$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

und Morphismen

$$\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$$

eineindeutig.

1.14 Definition: (a) Es sei $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Eine Untergarbe von $\mathscr{F}$ ist eine abelsche Garbe $\mathscr{G}$, so dass $\mathscr{G}(U)$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ einer Untergruppe von $\mathscr{F}(U)$ ist und so dass die Inklusion $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ ein Morphismus ist. Man schreibt dann

$$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}.$$

Es gilt dann auch: Für alle $x \in X$ ist $\mathscr{G}_x$ eine Untergruppe von $\mathscr{F}_x$.

(Die Inklusionen $\mathscr{G}(U) \subset \mathscr{F}(U)$ induzieren $\mathscr{G}_x \to \mathscr{F}_x$.)

(b) Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ abelsche Garben auf X und $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ sei ein Morphismus. Dann ist der *Kern* von φ die Untergarbe $\ker \varphi$ von $\mathscr{F}$ mit

$$(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi(U).$$

Wir sagen: φ ist *injektiv* $\iff$ $\forall U \subset X$ offen: $\varphi(U)$ ist injektiv. φ ist also injektiv, wenn $\ker \varphi = 0$.

(c) Das *Bild* $\operatorname{im} \varphi$ eines Garbenhomomorphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ wird definiert als

$$\operatorname{im} \varphi = (\widetilde{im} \varphi)^+$$

Für $U \subset X$ offen gilt also

$$(\operatorname{im} \varphi)(U) = \{t \in \mathscr{G}(U) \mid \forall x \in U \exists V \subset U \text{ offene Umgebung von } x, \\ s \in \mathscr{F}(V), \text{so dass } \varphi(V)(s) = t\}$$

φ heißt *surjektiv*, wenn $\operatorname{im} \varphi = \mathscr{G}$ gilt.

Man beachte, dass die Homomorphismen $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ dann im allgemeinen *nicht* surjektiv sind!

Es gilt aber, wie wir schon gezeigt haben, φ ist surjektiv $\iff$ $\forall x \in X : \varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ ist surjektiv.

(d) Es sei $\mathscr{G}$ eine abelsche Untergarbe der abelschen Garbe $\mathscr{F}$. Dann wird die Quotientengarbe $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ definiert durch

$$\mathscr{F}/\mathscr{G} = (U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U))^+$$

Man beachte, dass der kanonische Homomorphismus

$$\theta(U) : \mathscr{F}(U)/\mathscr{G}(U) \to (\mathscr{F}/\mathscr{G})(U)$$

im allgemeinen kein Isomorphismus ist.

(e) Der Cokern $\operatorname{coker}\varphi$ eines Garbenhomomorphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ wird definiert als
$$\operatorname{coker}\varphi : \mathscr{G} / \operatorname{im}\varphi = \left(\widetilde{\operatorname{coker}\varphi}\right)^{+}.$$

1.15 Definition und Satz: Es seien $\mathscr{F}^i$ abelsche Garben auf X und $\varphi^i : \mathscr{F}^i \to \mathscr{F}^{i+1}$ sei ein Morphismus. Dann heißt die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathscr{F}^{i+1} \longrightarrow \mathscr{F}_x^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

exakt, wenn für alle i gilt
$$\operatorname{im}\varphi^{i-1} = \ker\varphi^i.$$
Dies gilt genau dann, wenn für alle $x \in X$ die induzierte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}_x^{i-1} \longrightarrow \mathscr{F}_x^{i} \longrightarrow \mathscr{F}_x^{i+1} \longrightarrow \mathscr{F}_x^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

der Halme exakt ist.

Beweis: 1. Schritt: Wir betrachten zunächst eine kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

von Garbenhomomorphismen.
Wir zeigen

(a) Ist $(*)$ exakt, so ist für alle $x \in X$ die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathscr{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathscr{H}_x \longrightarrow 0 \tag{$**$}$$

exakt.

Es sei also $(*)$ exakt und $x \in X$. Da α injektiv ist, ist auch α_x injektiv und da β surjektiv ist, ist es auch β_x. Da $\beta \circ \alpha = 0$ gilt, gilt auch $\beta_x \circ \alpha_x = (\beta \circ \alpha)_x = 0$.
Zu zeigen bleibt: $\ker\beta_x \subset \operatorname{im}\alpha_x$.
Es sei U eine offene Umgebung von x, $s \in \mathscr{G}(U)$ und es sei $\beta_x(s_x) = 0$. Wir können U so klein wählen, dass auch $\beta(U)(s) = 0$ gilt. Damit ist $s \in (\ker\beta)(U)$. Da $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$, ist also $s \in (\operatorname{im}\alpha)(U)$. Es gibt also eine offene Umgebung V von x in U und ein $t \in \mathscr{F}(V)$, so dass $\alpha(V)(t) = s \mid V$ und somit $\alpha_x(t_x) = s_x$. Damit ist die Exaktheit von $(**)$ bewiesen.
Jetzt zeigen wir umgekehrt:

(b) Ist $(**)$ für alle $x \in X$ exakt, so ist auch $(*)$ exakt.

Die Surjektivität von β ist klar. Wir zeigen, dass $\alpha(U)$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ injektiv ist: Sei $s \in \mathscr{F}(U)$ und $\alpha(U)(s) = 0$. Dann gilt auch $\alpha_x(s_x) = (\alpha(U)(s))_x = 0$ für alle $x \in U$ und wegen der Injektivität von α_x also $s_x = 0$ für alle $x \in U$.

Nach (G1) folgt $s = 0$.

Als nächstes zeigen wir $\beta(U) \circ \alpha(U) = 0$:

Sei $s \in \mathscr{F}(U)$. Für alle $x \in U$ gilt dann

$$0 = (\beta_x \circ \alpha_x)(s_x) = (\beta \circ \alpha)_x(s_x) = (\beta(U) \circ \alpha(U))(s)_x$$

und nach (G1) ist folglich $(\beta(U) \circ \alpha(U))(s) = 0$. Schließlich müssen wir noch zeigen, dass

$$\ker \beta(U) \subset (\operatorname{im} \alpha)(U)$$

gilt. Sei dazu $s \in \mathscr{G}(U)$ mit $\beta(U)(s) = 0$. Es sei $x \in U$. Dann ist

$$\beta_x(s_x) = \beta(U)(s)_x = 0$$

und somit gibt es ein $t_x \in \mathscr{F}_x$ mit

$$\alpha_x(t_x) = s_x$$

Man kann eine Umgebung V von x in U wählen, so dass t_x durch einen Schnitt $t \in \mathscr{F}(V)$ repräsentiert wird. Es gilt dann

$$\alpha(V)(t)_x = s_x$$

und wenn man gegebenfalls V verkleinert, gilt

$$\alpha(V)(t) = s \mid V.$$

Nach Definition von $\operatorname{im} \alpha$ ist damit gezeigt dass $s \in (\operatorname{im} \alpha)(U)$. $\square$

2. Schritt:

Es sei $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Garbenhomomorphismus von Garben $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ auf X. Es sei $x \in X$.

Dann gilt

(i) $(\ker \varphi)_x = \ker(\varphi_x)$,

(ii) $(\operatorname{im} \varphi)_x = \operatorname{im}(\varphi_x)$,

(iii) $(\operatorname{coker}\varphi)_x = \operatorname{coker}(\varphi_x)$.

Nach Definition erhält man zu φ zwei kurze exakte Sequenzen.

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \operatorname{im}\varphi \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\varphi \xrightarrow[\beta]{} \mathscr{G} \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow 0$$

und es gilt $\varphi = \beta \circ \alpha$.
Nach dem ersten Schritt sind dann

$$0 \longrightarrow (\ker\varphi)_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} (\operatorname{im}\varphi)_x \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow (\operatorname{im}\varphi)_x \xrightarrow{\beta_x} \mathscr{G}_x \longrightarrow (\operatorname{coker}\varphi)_x \longrightarrow 0$$

exakt und es gibt $\varphi_x = \beta_x \circ \alpha_x$.
Daraus folgt dann

$$\begin{array}{rcccl} (\ker\varphi)_x & = & \ker(\alpha_x) & = & \ker(\varphi_x), \\ (\operatorname{im}\varphi)_x & = & \operatorname{im}(\alpha_x) & = & \operatorname{im}(\varphi_x), \\ (\operatorname{coker}\varphi)_x & = & \operatorname{coker}(\beta_x) & = & \operatorname{coker}(\varphi_x). \end{array}$$

3. Schritt:
Es sei eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathscr{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathscr{F}^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

gegeben. Diese Sequenz ist genau dann exakt, wenn $\ker\varphi^i = \operatorname{im}\varphi^{i-1}$ und das gilt dann, wenn

$$(\ker\varphi^i)_x = (\operatorname{im}\varphi^{i-1})_x \text{ für alle } x \in X.$$

Nach dem zweiten Schritt ist dies aber äquivalent zu

$$\ker(\varphi_x^i) = \operatorname{im}(\varphi_x^{i-1}) \text{ für alle } x \in X.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

1.16 Lemma: Es sei $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}$ eine exakte Sequenz von Garben auf X. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathscr{G}(X) \xrightarrow{\beta(x)} \mathscr{H}(X)$$

exakt.
Man sagt dann: Der Schnittfunktor $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$ ist *linksexakt*.

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\ker(\beta(x)) \subset \mathrm{im}(\alpha(X)).$$

Es sei also $s \in \mathscr{G}(X)$ mit $\beta(X)(s) = 0$. Dann gilt $\beta_x(s_x) = 0$ für alle $x \in X$ und damit gibt es zu jedem $x \in X$ ein $t_x \in \mathscr{F}_*$ mit $\alpha_x(t_x) = s_x$.
Man kann offene Umgebungen V_x von x wählen und Schnitte $\tau_x \in \mathscr{F}(V_x)$, so dass

$$\alpha(V_x)(\tau_x) = s \mid V_x.$$

Es gilt also insbesondere

$$\alpha(V_x \cap V_y)(\tau_x \mid V_x \cap V_y) = \alpha(V_x \cap V_y)(\tau_y \mid V_x \cap V_y)$$

für alle $x, y \in X$ und da α injektiv ist, folgt somit

$$\tau_x \mid V_x \cap V_y = \tau_y \mid V_x \cap V_y$$

Nach (G2) gibt es ein $\tau \in \mathscr{G}(X)$ mit

$$\tau \mid V_x = \tau_x$$

also

$$s \mid V_x = \alpha(V_x)(\tau \mid V_x) = \alpha(X)(\tau) \mid V_x$$

und nach (G1) folgt.

$$s = \alpha(X)(\tau).$$

Damit ist $s \in \mathrm{im}\,\alpha(X)$. □

1.17 Beispiel: (a) Wir kommen noch einmal auf Beispiel 1.12(a) zurück: X sei wie in 1.12(a) eine integre quasiprojektive Varietät, $\mathscr{O}$ die Strukturgarbe und $\mathscr{K}$ die Garbe der rationalen Funktionen auf X. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}/\mathscr{O} \longrightarrow 0$$

und somit die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathscr{K}(X) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, \mathscr{K}/\mathscr{O}) \qquad (*)$$

$\Gamma(X, \mathscr{K}/\mathscr{O})$ ist die Gruppe der Cousin-I-Verteilungen auf X. Die Abbildung β ist im allgemeinen nicht surjektiv wie wir am Beispiel der elliptischen Kurven gesehen haben. Wir werden lernen, wie man $(*)$ zu einer exakten Sequenz fortsetzt. Es gibt gewisse Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathscr{F})$ für jedes $i \geq 0$ und für jede abelsche Garbe auf X. Für konstante Garben wie $\mathscr{K}$ wird $H^i(X,\mathscr{K}) = 0$ sein, wenn $i > 0$. $(*)$ lässt sich dann zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathscr{K}(X) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X,\mathscr{K}/\mathscr{O}) \xrightarrow{\sigma} H^i(X,\mathscr{O}) \longrightarrow 0$$

verlängern. Es gilt $H^1(X,\mathscr{O}) \cong \operatorname{coker}(\beta)$ ist die Gruppe der 'nicht lösbaren' Cousin-I-Verteilungen.

Nur dann wenn $\sigma(s) = 0$ gilt, ist die Cousin-I-Verteilung s lösbar.

Es ist eine wichtige Aufgabe der Algebraischen Geometrie die Cohomologiegruppen zu berechnen. Die Methoden sind erstaunlich vielfältig.

(b) Die multiplikative Variante:

X sei wie in (a). Es sei $\mathscr{O}^\times$ die multiplikative abelsche Garbe der Einheiten in $\mathscr{O}$.

Weiter sei $\mathscr{K}^\times$ die konstante multiplikative abelsche Garbe der von Null verschiedenen rationalen Funktionen auf X.

Dann ist $\mathscr{O}^\times$ eine Untergarbe von $\mathscr{K}^\times$. Es sei $\mathscr{D} = \mathscr{K}^\times/\mathscr{O}^\times$ die Quotiengarbe. Wir erhalten die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^\times \longrightarrow \mathscr{K}^\times \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow 0$$

Die globalen Schnitte $D \in \Gamma(X,\mathscr{D})$ heißen *Cartier-Divisoren* auf X. $\mathscr{D}$ heißt die Garbe der Keime von Cartier-Divisoren auf X.

Ein Cartier-Divisor D auf X wird durch eine Familie $(D_x)_{x\in X}$ von Restklassen $D_x = f_x \mod \mathscr{O}_x^\times$ gegeben, wobei $f_x \in \mathscr{K}_x^\times = K(X)^\times$ eine von Null verschiedene rationale Funktion ist. Zu jedem Punkt $a \in X$ muss es eine offene Umgebung V von a geben und eine rationale Funktion $f_V \in K(X)^\times$, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\frac{f_x}{f_V}$ ist eine Einheit in $\mathscr{O}_x$.

f_x heißt dann eine *lokale Gleichung* von D im Punkt x und f_V heißt *lokale Gleichung* von D auf der offenen Menge V.

Auch hier erhält man eine exakte Sequenz, die im Fall projektiver Varietäten folgende einfache Form hat:

$$0 \longrightarrow K^\times \longrightarrow K(X)^\times \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{D}) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathscr{O}^\times) \longrightarrow 0$$

Die Cartier-Divisoren im Bild der Abbildung $K(X)^\times \to \Gamma(X,\mathscr{D})$ heißen *Hauptdivisoren*.

$H^1(X,\mathscr{O}^\times)$ ist eine interessante abelsche Gruppe. Es wird sich zeigen, dass die Cohomologieklassen $\xi \in H^1(X,\mathscr{O}^\times)$ eineindeutig den Isomorphieklassen algebraischer Geradenbündel auf X entsprechen. Die Surjektivität von σ bedeutet, dass jede Klasse ξ von der Form $\delta(D)$ mit $D \in \Gamma(X,\mathscr{D})$ ist. Die Exaktheit besagt, dass

$$\delta(D_1) = \delta(D_2)$$

genau dann ist, wenn $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist.

(c) Die Exponentialsequenz. Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathscr{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X, $\mathscr{O}^\times$ sei die Garbe der nullstellenfreien holomorphen Funktionen. Man erhält die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{O}^\times \longrightarrow 0$$

mit $\varphi(f) = e^{2\pi i f}$. (Vergleiche Beispiel 1.12(b).) Es sei etwa X ein Gebiet (offene und zusammenhängende Menge) in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Dann ist $H^1(X,\mathscr{O}) = 0$ und man erhält die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathscr{O}^\times(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathbb{Z}_X) \longrightarrow 0$$

Die Gruppe $H^1(X,\mathbb{Z}_X)$ ist eine topologische Invariante von X. Für die gelochte Ebene

$$X = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

ist bekanntlich $H^1(X,\mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}$ und $\delta : \mathscr{O}^\times(X) \to \mathbb{Z}$ ist eine ganzzahlige Funktion. Man kann $\sigma(h)$ berechnen:

$$\delta(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dh(z)}{h(x)},$$

wobei das Integral über einen den Punkt 0 einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufenden geschlossenen Weg zu bilden ist.

Für $h(z) = z^n$ ergibt sich

$$\delta(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz^n}{z^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{ndz}{z} = n.$$

Für $h(z) = e^{2\pi i f(z)}$ erhält man

$$\sigma(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{de^{2\pi i f(z)}}{e^{2\pi i f(z)}} = \oint df(z) = 0$$

1.18 Definition: (Bildgarbe)

Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ sei eine stetige Abbildung. Ist nun $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so wird die Bildgarbe $f_*\mathscr{F}$ auf Y wie folgt definiert:

Für $V \subset Y$ offen setzt man

$$(f_*\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

Ist $W \subset V \subset Y$, W, V offen, so wird $\rho_{V,W} : (f_x\mathscr{F})(V) \to (f_*\mathscr{F})(W)$ als die Restriktionsabbildung $\rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(W)}$ definiert. Offensichtlich ist $f_*\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf Y und $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$,

$$\varphi = (\varphi(U)) \mapsto f_*\varphi := (\varphi(f^{-1}(V)))$$

definiert einen kovarianten Funktor

$$f_* : \mathscr{A}b(X) \to \mathscr{A}b(Y).$$

Der Funktor f_* ist additiv, d.h.

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}(f_*\mathscr{F}, f_*\mathscr{G})$$

ist eine Gruppenhomomorphismus.

Außerdem ist f_* linksexakt (aber im allgemeinen nicht exakt), d.h. ist

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

exakte Garbensequenz auf X, so ist

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G} \longrightarrow f_*\mathscr{H}$$

exakt auf Y.

1.19 Beispiel: (a) Es sei $Y = \{p\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. $f : X \to Y$ sei die konstante Abbildung. $\mathscr{F}$ sei eine abelsche Garbe auf X. Dann ist die Bildgarbe $f_*\mathscr{F}$ nichts anderes als die Gruppe $\Gamma(X, \mathscr{F})$ der globalen Schnitte auf X. Der Schnittfunktor $\Gamma(X, -)$ ist also ein Spezialfall des Bildgarbenfunktors f_*.

(b) Es sei Y eine affine integre K-Varietät mit affinen Koordinatenring A. Es sei $X = Y \times \mathbb{A}^1$. X ist ebenfalls affine K-Varietät. Es sei t eine Unbestimmte. Dann ist $K[t]$ der Koordinatenring von $\mathbb{A}^1$ und der Polynomring $A[t]$ über dem Ring A ist der Koordinatenring von X. Es sei $f : X \to Y$ die Projektion $f(y,t) = y$. Dann ist

$$(f_*\mathscr{O}_X)(Y) = \mathscr{O}_X(X) = A[t]$$

und $\mathscr{O}_Y(Y) = A$. $(f_*\mathscr{O}_X)(Y)$ ist als $\mathscr{O}_Y(Y)$-Modul nicht endlich erzeugt.

Betrachtet man die quasiprojektive Varietät $Z = Y \times \mathbb{P}^1$ und die Projektion $f : Z \to Y,\ f(y,p) = y$, so kann man zeigen, dass

$$f_*\mathscr{O}_Z = \mathscr{O}_Y.$$

Wir wissen ja schon, dass reguläre Funktionen auf $\mathbb{P}^1$ konstant sind. Man kann den Beweis kopieren und zeigen, dass

$$(f_*\mathscr{O}_Z)(U) = \mathscr{O}_Z(U \times \mathbb{P}^1) = \mathscr{O}_Y(U)$$

gilt.

(c) Dies ist ein Beispiel aus der Topologie. Es sei $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $n \geq 1$ und $f : X \to X$ sei die n-blättige unverzweigte Überlagerung

$$f(z) = z^n.$$

Es sei $\mathbb{Z}_X$ die konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}$. Was ist $f_*\mathbb{Z}_X$?

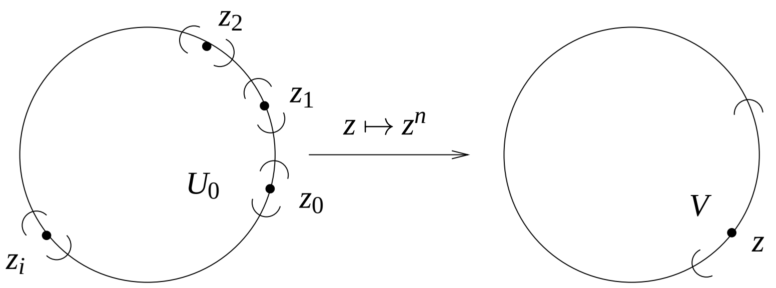
Ist $f_*\mathbb{Z}_X$ auch ein konstante Garbe?

Berechnen wir die Halme $(f_*\mathbb{Z}_X)_Z$. Es gilt $f^{-1}(z) = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ mit $z_i = \zeta^i w$, wobei w eine n-te Wurzel von z und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist.

Ist nun U_0 eine kleine zusammenhängende Umgebung von z_0 in X (so klein, dass U_0 in einem Segment vom Winkel $< \frac{2\pi}{n}$ liegt) so ist $V = f(U_0)$ offene Umgebung von z in X und

$$f^{-1}(V) = U_0 \cup \zeta U_0 \cup \ldots \cup \zeta^{n-1} U_0$$

mit $\zeta^i U_0 \cap \zeta^j U_0 = \emptyset$ für $0 \leq i < j \leq n-1$



und folglich ist

$$\begin{aligned}(f_*\mathbb{Z}_X)(V) &= \mathbb{Z}_X(f^{-1}(V)) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}_X(\zeta^i U_0) = \mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

Ein Element $(k_0, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ definiert die lokal konstante Funktion

$$s : f^{-1}(V) \to \mathbb{Z}$$

mit $s \mid \zeta^i U_0 = \text{ konst } = k_i$.

Damit sind alle Halme von $f_*\mathbb{Z}_X$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}^n$.

Man erkennt also die Blätterzahl von f wieder. Aber nach Definition gilt

$$(f_*\mathbb{Z}_X)(X) = \mathbb{Z}_X(f^{-1}(X)) = \mathbb{Z}_X(X) = \mathbb{Z},$$

denn X ist zusammenhängend.

Damit ist klar, dass $f_*\mathbb{Z}_X$ nicht etwa die konstante Garbe auf X mit Werten in $\mathbb{Z}^n$ ist, wie es die lokale Berechnung suggeriert.

Man hat hier ein neues Phänomen:

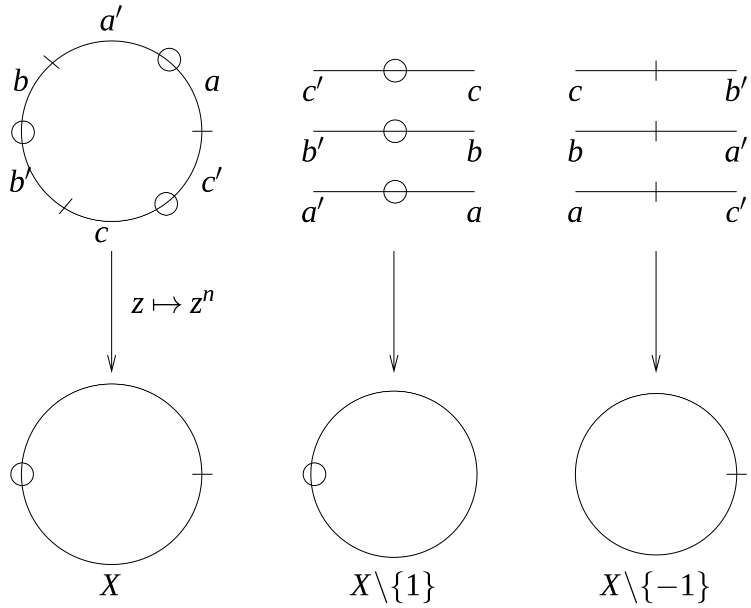
Die Garbe $f_*\mathbb{Z}_X$ ist *lokal* konstant, aber nicht konstant. (Begriff der lokalen konstanten Garbe siehe [G/M], I, §5.9.)

Es ist leicht zu sehen, dass $f_*\mathbb{Z}_X$ über den beiden offenen Menge $U_0 = X \setminus \{1\}, U_1 = X \setminus \{-1\}$ konstant ist. Aber über den Komponenten

$$A = \{z \in X \mid \operatorname{Im} z > 0\} \quad B\{z \in X \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$

von $U_0 \cap U_1 = X \setminus \{1, -1\}$ ist die Garbe $\mathbb{Z}^n_{U_0}$ mit $\mathbb{Z}^n_{U_1}$ nicht trivial verklebt. Als Übung überlege man wie!

Der Fall $n = 3$:



1.20 Definition: Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ sei eine stetige Abbildung. Weiter sei $\mathscr{G}$ eine abelsche Garbe auf Y.
Für eine offene Menge $U \subset X$ betrachten wir das System

$$\mathfrak{U}_{f(U)} = \{V \mid V \subset Y \text{ offen und } f(U) \subset V\}.$$

$\mathfrak{U}_{f(U)}$ ist mit $\supset$ eine filtrierende partiell geordnete Menge. Wir setzten

$$(f^{\#}\mathscr{G})(U) := \varinjlim_{V \in \mathfrak{U}_{f(U)}} \mathscr{G}(V).$$

Ist $U' \subset X$ offen und $U' \subset U$, so ist $\mathfrak{U}_{f(U)} \subset \mathfrak{U}_{f(U')}$ und somit gibt es einen kanonischen Homomorphismus

$$\rho_{U',U} : (\mathscr{F}^{\#}\mathscr{G})(U) \to \mathscr{F}^{\#}\mathscr{G})(U').$$

Offensichtlich ist $f^{\#}\mathscr{G}$ eine abelsche Prägarbe auf X. Die assoziierte abelsche Garbe

$$f^{-1}\mathscr{G} := (f^{\#}\mathscr{G})^{+}$$

heißt die *Urbildgarbe* von $\mathscr{G}$ unter der Abbildung f.
Man sieht leicht, dass der Halm der Urbildgarbe $f^{-1}\mathscr{G}$ in einem Punkt $x \in X$ kanonisch isomorph zum Halm der Garbe $\mathscr{G}$ im Punkt $f(x)$ ist:

$$f^{-1}\mathscr{G}_x = (f^{\#}\mathscr{G})_x = \varinjlim_{U \ni x} \left(\varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(V) \right) = \varinjlim_{V \ni f(x)} \mathscr{G}(V) = \mathscr{G}_{f(x)}.$$

Insbesondere hat $f^{-1}\mathscr{G}$ in allen Punkten der Faser $f^{-1}(y)$ denselben Halm, nämlich $\mathscr{G}_y$. Ist $U \subset X$ offen und $f(U) \subset Y$ offen, so ist $(f^{\#}\mathscr{G})(U) = \mathscr{G}(f(U))$.

1.21 Beispiel: (a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion $f(x,y) = y$. $\mathscr{G}$ sei die Garbe der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Es seien $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}$ disjunkte nichtleere offene Mengen und $V \subset \mathbb{R}$ sei eine weitere offene Menge. Dann gilt

$$f(V_1 \times V) = f(V_2 \times V) = f(V_1 \times V \cup V_2 \times V) = V,$$

also ist

$$(f^{\#}\mathscr{G})(V_1 \times V) = (f^{\#}\mathscr{G})(V_2 \times V) = (f^{\#}\mathscr{G})(V_1 \times V \cup V_2 \times V) = \mathscr{G}(V).$$

Die kanonische Abbildung

$$f^{\#}\mathscr{G}(V_1 \times V \cup V_2 \times V) \to f^{\#}\mathscr{G}(V_1 \times V) \times f^{\#}\mathscr{G}(V_2 \times V)$$

ist also nicht surjektiv. $f^{\#}\mathscr{G}$ erfüllt somit nicht das Garbenaxiom (G2).

(b) Betrachtet man die Projektion $f : K^2 \to K \;\; f(x,y) = y)$, wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist und K^2, K mit der Zariski-Topologie versehen sind, so gilt für die Strukturgarbe $\mathscr{O}$ auf K:

$$f^{\#}\mathscr{O} = f^{-1}\mathscr{O}.$$

Hier ist $f^{\#}\mathscr{O}$ also eine Garbe. (Übung)

1.22 Definition: (Einschränkung auf Teilraum)

Es sei X ein topologischer Raum und $Z \subset X$ irgendeine Teilmenge. Mit der Relativtopologie ist Z ein topologischer Raum und die Inklusionsabbildung $i : Z \to X$ ist stetig.

Ist $\mathscr{F}$ abelsche Garbe auf X, so heißt $\mathscr{F}/Z := i^{-1}\mathscr{F}$ die *Einschränkung* von $\mathscr{F}$ auf Z. Für alle Punkte $z \in Z$ ist $(\mathscr{F}/Z)_z = \mathscr{F}_z$.

Wir kommen nun zu einigen Ergänzungen. Es handelt sich um Übungsaufgaben aus dem Buch von Hartshorne. Zum Teil findet man die Lösungen in dem Klassiker: Godement, Théorie des faisceaux.

1.23 Übung: (Espace étalé)

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ sei eine abelsche Prägarbe. (In der älteren Literatur spricht man von 'Garbendaten'.) Die folgende Konstruktion eröffnet eine weitere Möglichkeit, den Begriff der zu $\mathscr{F}$ assoziierten Garbe zu verstehen. Sie ist mehr anschaulich geometrisch (zumindestens vom Ansatz her).

Der *ausgebreitete Raum* Spé($\mathscr{F}$) von $\mathscr{F}$ über X (espace étalé) Spé($\mathscr{F}$) ist ein topologischer Raum $\mathbf{F}$ zusammen mit einer lokal topologischen stetigen Abbildung $p : \mathbf{F} \to X$.

Mengentheoretisch ist alles ganz einfach:

Man setzt

$$\mathbf{F} = \bigsqcup_{x \in X} \mathscr{F}.$$

$\mathbf{F}$ ist also die disjunkte Vereinigung aller Halme von $\mathscr{F}$.

$$p : \mathbf{F} \to X$$

ist die Abbildung, die alle Elemente des Halms $\mathscr{F}_x$ auf den Punkt x abbildet. Ist $U \subset X$ offen und $s \in \mathscr{F}(U)$, so definiert s eine Abbildung

$$\sigma : U \to \mathbf{F}$$

mit $\sigma(x) := s_x \in \mathscr{F}_x$. Für diese Abbildung gilt offensichtlich

$$p \circ \sigma = i,$$

wobei $i : U \to X$ die Inklusion ist.

Wir kommen zur Topologie auf $\mathbf{F}$.

Für $U \subset X$ offen, $s \in \mathscr{F}(U)$ sei $B(U,s) := \sigma(U) = \{s_x \mid x \in U\} \subset \mathscr{F}$.

Eine Teilmenge $W \subset \mathbf{F}$ heiße nun offen, wenn W die Vereinigung von Teilmengen der Form $B(U,s)$ ist, wenn also zu jedem $w \in W$ eine offene Umgebung U von $p(w)$ in X existiert und ein Schnitt $s \in \mathscr{F}(U)$, so dass

$$B(U,s) \subset W.$$

Um zu sehen, dass dadurch eine Topologie auf $\mathbf{F}$ definiert ist, muss man nur zeigen, dass für $U,V \subset X$ offen, $s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$ eine Menge $B(U,s) \cap B(V,t) \subset \mathbf{F}$ offen ist. Sei dazu $w \in B(U,s) \cap B(V,t)$. Dann ist $x = p(w) \in U \cap V$ und $w = s_x = t_x$. Damit gibt es eine offene Umgebung W von x in $U \cap V$, so dass

$$s \mid W = t \mid W$$

und folglich ist $w \in B(W, s \mid W) \subset B(U,s) \cap B(V,t)$. Das zeigt: $B(U,s) \cap B(V,t)$ ist offen.

Offensichtlich ist die Abbildung

$$p : \mathbf{F} \to X$$

stetig, ja sogar lokal topologisch, denn

$$\pi := p \mid B(U,s) : B(U,s) \to U$$

ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\sigma : U \to B(U,s), \quad \sigma(x) := s_x.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass σ stetig ist, oder dass $\pi(W)$ offen ist, wenn $W \subset B(U,s)$ offen ist. Das ist aber klar.

Damit haben wir den ausgebreiteten Raum

$$p : \mathbf{F} \to X$$

konstruiert. Die Addition in den Halmen $\mathscr{F}_x = p^{-1}(x)$ liefert eine ‘Addition’

$$+ : \mathbf{F} \times_X \mathbf{F} \to \mathbf{F},$$

wobei $\mathbf{F} \times_X \mathbf{F} := \{(s_1, s_2) \in \mathbf{F} \times \mathbf{F} \mid p(s_1) = p(s_2)\}$ das *Faserprodukt* über X ist.

Man kann nun die zu $\mathscr{F}$ assoziierte Garbe $\mathscr{F}^+$ wie folgt definieren:

$$\mathscr{F}^+(U) = \Gamma(U, \mathbf{F}) := \{s : U \to \mathbf{F} \mid s \textit{ stetig} \text{ und } p \circ s = i\},$$

wobei $U \subset X$ offen und $i : U \to X$ die Inklusionsabbildung ist. $\Gamma(U, \mathbf{F})$ ist die Menge der stetigen Schnitte in $\mathbf{F}$ über U.

Die Addition in $\Gamma(U, \mathbf{F})$ wird elementweise definiert: Für $s,t : U \to \mathbf{F}$ mit $p \circ s = p \circ t = i$ ist $(s,t) : U \to \mathbf{F} \times_X \mathbf{F}$. Für $x \in U$ setzt man

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x).$$

Die Restriktionsabbildungen

$$\rho_{U,V} : \Gamma(U, \mathbf{F}) \to \Gamma(V, \mathbf{F})$$

sind die gewöhnlichen Einschränkungsabbildungen $(s : U \to \mathbf{F}) \mapsto (s \mid V : V \to \mathbf{F})$. Offensichtliche ist damit $\mathscr{F}^+$ eine abelsche Garbe. Weiter hat man den kanonischen Homomorphismus $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ mit $\theta(U)(s) = (x \mapsto s_x)$ für $U \subset X$ offen, $s \in \mathscr{F}(U)$.

1.24 Übung: (Träger)

(a) Sei $\mathscr{F}$ eine abelsche Prägarbe auf X. Ist $s \in \mathscr{F}(X)$, so heißt $\operatorname{supp}(s) = \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$ der *Träger* von s. Es gilt: $\operatorname{supp}(x)$ ist abgeschlossen in X. Weiter definiert man

$$\operatorname{supp}(\mathscr{F}) := \{x \in X \mid \mathscr{F}_x \neq 0\} = \operatorname{supp}(\mathscr{F}^+).$$

(b) Sei $i : U \to X$ die Inklusion einer offenen Menge $U \subset X$. $\mathscr{F}$ sei eine abelsche Prägarbe auf U. Man definiert die Prägarbe $\tilde{\mathscr{F}}$ auf X durch

$$\tilde{\mathscr{F}}(V) = \begin{cases} \mathscr{F}(V), & \text{falls } V \subset U \\ 0, & \text{falls } V \not\subset U \end{cases}$$

Dann ist $\operatorname{supp} \tilde{\mathscr{F}} = \operatorname{supp} \mathscr{F} \subset U$.

Der Träger einer abelschen Prägarbe ist also im allgemeinen nicht abgeschlossen;

(c) Ist $\mathscr{F}$ eine abelsche Garbe auf U, so definiert man

$$i_! \mathscr{F} := \tilde{\mathscr{F}}^+.$$

Es gilt dann $(i_! \mathscr{F})_\times = 0$ für $x \in X \backslash U$ und $(i_! \mathscr{F})_\times = \mathscr{F}_\times$ für $x \in U$. Weiter ist

$$(i_! \mathscr{F}) \mid U = \mathscr{F}.$$

1.25 Übung: (Die Garbe $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$)

Es seien $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ abelsche Garben auf X. Dann wird die Prägarbe $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ wie folgt definiert:

$$\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})(U) = Hom(\mathscr{F} \mid U, \mathscr{G} \mid U)$$

mit den natürlichen Restriktionsabbildungen. Dann gilt: $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ ist eine abelsche Garbe.

Beweis: Zu (G1): Es sei $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ und $\varphi : \mathscr{F} \mid U \to \mathscr{G} \mid U$ sei ein Homomorphismus mit $\varphi \mid V_i = 0$ für alle i.

Ist $V \subset U$ offen, so gilt für alle $s \in \mathscr{F}(V)$ und alle $i \in I$: $\varphi(V)(s) \mid V_i \cap V = \varphi(V_i \cap V)(s \mid V_i \cap V) = 0$

Damit folgt $\varphi(V)(s) = 0$, denn $\mathscr{G}$ erfüllt nach Voraussetzung (G1). Damit ist $\varphi(V) = 0$, d.h. $\varphi = 0$. $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ erfüllt somit (G1).

zu (G2): Es sei $U = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ und $\varphi_i \in \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})(V_i)$, also $\varphi_i : \mathscr{F} \mid V_i \to \mathscr{G} \mid V_i$ Homomorphismus. Es gelte nun

$$\varphi_i \mid V_i \cap V_j = \varphi_j \mid V_i \cap V_j \text{ für alle } i, j \in J.$$

Es sei $V \subset U$ offen, $s \in \mathscr{F}(V)$. Wir wollen

$$\varphi(V)(s) \in \mathscr{G}(V)$$

definieren, so dass $\varphi : \mathscr{F} \mid U \to \mathscr{G} \mid U$ Homomorphismus wird mit $\varphi \mid V_i = \varphi_i$ für alle $i \in I$. Ohne Einschränkung sei $V_i \subset V$, sonst argumentiere man mit $V_i \cap V$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \varphi_i(V_i)(s \mid V_i) \mid V_i \cap V_j = \varphi_i(V_i \cap V_j)(s \mid V_i \cap V_j) \\
= \quad & \varphi_j(V_i \cap V_j)(s \mid V_i \cap V_j) = \varphi_j(V_j)(s \mid V_j) \mid V_i \cap V_j.
\end{aligned}
$$

Da $\mathscr{G}$ eine Garbe ist, gibt es genau ein $t \in \mathscr{G}(V)$ mit

$$t \mid V_i = \varphi_i(V_i)(s \mid V_i).$$

Man setze dann

$$\varphi(V)(s) := t.$$

Damit ist für $V \subset U$ ein Homomorphismus

$$\varphi(V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V)$$

definiert. Offensichtlich gilt für $W \subset V \subset U$, $s \in \mathscr{F}(V)$:

$$\varphi(V)(s) \mid W = \varphi(W)(s \mid W).$$

Damit haben wir einen Homomorphismus

$$\varphi : \mathscr{F} \mid U \to \mathscr{G}(U)$$

Offensichtlich ist auch $\varphi \mid V_i = \varphi_i$. □

1.26 Übung: (welke Garben)

Eine Garbe $\mathscr{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt *welk* (flasque, flabby), wenn für jedes Paar offener Mengen U, V mit $V \subset U$ die Restriktionsabbildung $\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ surjektiv ist. Es gilt

(a) Eine konstante Garbe auf einem irreduziblen topologischen Raum ist welk.

(b) Ist $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ exakt und $\mathscr{F}$ welk, so ist die Sequenz der globalen Schnitte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathscr{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathscr{H}(X) \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

(c) Ist $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz abelscher Garben und sind $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ welk, so ist auch $\mathscr{H}$ welk.

(d) Die Bildgarbe einer welken Garbe ist welk.

(e) Es sei $\mathscr{F}$ eine welke Garbe. Dann sei $\mathscr{W} = \mathscr{W}(\mathscr{F})$ die abelsche Garbe mit

$$\mathscr{W}(U) := \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x.$$

$\mathscr{W}(U)$ ist also die Gruppe aller (auch der unstetigen) Schnitte $s : U \to \mathbf{F} = \text{Spé}(\mathscr{F})$.

Dann gilt: $\mathscr{W}$ ist welk.

Die *welke Auflösung* von $\mathscr{F}$ ist die exakte Garbensequenz.

$$\mathscr{W}^{\circ} = (\mathscr{W}^0 \xrightarrow{d^0} \mathscr{W}^1 \xrightarrow{d^1} \mathscr{W}^2 \xrightarrow{d^2} \mathscr{W}^3 \longrightarrow \ldots),$$

wobei die welken Garben $\mathscr{W}^i$ und die Homomorphismen wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} &\mathscr{W}^0 = \mathscr{W}(\mathscr{F}), \quad \mathscr{W}^1 = \mathscr{W}(\mathscr{W}^0/\mathscr{F}), \\ &d^i : \mathscr{W}^i \twoheadrightarrow \mathscr{W}(\mathscr{F}) \hookrightarrow \mathscr{W}^1 \end{aligned}$$

und für $i > 0$

$$\begin{aligned} &\mathscr{W}^{i+1} = \mathscr{W}(\operatorname{coker} d^{i-1}) \\ &d^i : \mathscr{W}^i \twoheadrightarrow \operatorname{coker} d^{i-1} \hookrightarrow \mathscr{W}^{i+1}. \end{aligned}$$

zu (a): Da X irreduzibel ist, ist die konstante Garbe A_X durch

$$\begin{aligned} A_X(U) &= A \quad &&\text{für } U \neq \emptyset, \\ \rho_{U,V} &= id_A \quad &&\text{für } \emptyset \neq V \subset U, \end{aligned}$$

gegeben, also trivialerweise welk.

zu (b): Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$$\beta(X) : \mathscr{G}(X) \to \mathscr{H}(X)$$

surjektiv ist, denn alles andere ist schon in 1.16 gezeigt.

Es sei $s \in \mathscr{H}(X)$ ein globaler Schnitt.

Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}$ aller Paare (U,t), wobei $U \subset X$ offen, $t \in \mathscr{G}(U)$ Schnitt mit $\beta(U)(t) = s \mid U$.

Wir definieren eine Ordnung auf $\mathfrak{M}$:

$$(U,t) \leq (U',t') \iff U \subset U' \text{ und } t = t' \mid U.$$

Dann ist $(\mathfrak{M}, \leq)$ ein induktives System, d.h. Jede Kette $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ hat eine obere Schranke: Ist nämlich $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ eine Kette, d.h. für $(U,t),(U',t') \in \mathfrak{N}$ gilt

$$(U,t) \leq (U',t') \text{ oder } (U',t') \leq (U,t),$$

so betrachte man die offene Menge

$$\tilde{U} = \bigcup_{(U,t)\in\mathfrak{N}} U$$

und den Schnitt $\tilde{t} \in \mathscr{G}(\tilde{U})$ mit

$$\tilde{t} \mid U = t \text{ für alle } (U,t) \in \mathfrak{N}$$

$\tilde{t}$ existiert nach dem Garbenaxiom (G2) und es gilt

$$\beta(\tilde{U})(\tilde{t}) = s \mid \tilde{U},$$

also ist $(\tilde{U},\tilde{t}) \in \mathfrak{M}$ eine obere Schranke von $\mathfrak{N}$.

Nach dem Zornschen Lemma (siehe: Scheja/Storch: Lehrbuch der Algebra, Teil 1, Seite 24) gibt es somit ein maximales Element in $\mathfrak{M}$.

Es sei (U,t) ein solches.

Wir behaupten, dass $U = X$ gilt. Dann sind wir fertig, weil dann $t \in \mathscr{G}(X)$ mit $\beta(X)(t) = s$.

Annahme: $U \neq X$.

Wähle ein $x \in X \backslash U$. Da $\beta_x : \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ nach Voraussetzung surjektiv ist, gibt es eine offene Umgebung V von x in X, einen Schnitt $t' \in \mathscr{G}(V)$, so dass $\beta(V)(t') = s \mid V$. Es folgt

$$\beta(U\cap V)(t' \mid U\cap V) = s \mid U\cap V = \beta(U\cap V)(t \mid (U\cap V)$$

und somit ist

$$t' \mid U\cap V - t \mid U\cap V \in \ker\beta(U\cap V)$$

und da wegen der Linkexaktheit des Schnittfunktors die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U\cap V) \xrightarrow{\alpha(U\cap V)} \mathscr{G}(U\cap V) \xrightarrow{\beta(U\cap V)} \mathscr{H}(U\cap V)$$

exakt ist, gibt es ein $u \in \mathscr{F}(U\cap V)$ mit

$$t \mid U\cap V = t' \mid U\cap V + \alpha(U\cap V)(u).$$

Jetzt kommt der Clou: Da $\mathscr{F}$ welk ist, kann man u zu einem Schnitt $u' \in \mathscr{F}(V)$ fortsetzen. Man setze jetzt:

$$t'' := t' + \alpha(V)(u') \in \mathscr{F}(V).$$

Dann gilt

$$\beta(V)(t'') = \beta(V)(t') + (\beta(V)\circ\alpha(V))(u') = s \mid V$$

und natürlich

$$t \mid U \cap V = t'' \mid U \cap V.$$

Nach (G2) gibt es somit einen Schnitt

$$\hat{t} \in \mathscr{G}(U \cup V)$$

mit $\hat{t} \mid U = t$, $\hat{t} \mid V = t''$. Aus $\beta(U)(t) = s \mid U$, $\beta(V)(t'') = s \mid V$ folgt dann

$$\beta(U \cup V)(\hat{t}) = s \mid U \cup V.$$

Also ist $(U \cup V, \hat{t}) \in \mathfrak{M}$ und $(U,t) < (U \cup V, \hat{t})$ im Widerspruch zur Maximalität von (U,t). □

zu (c): Das folgt jetzt leicht aus (b):

Es sei $V \subset U$. Nach Voraussetzung haben wir denn ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und surjektiven Restriktionsabbildungen ρ_1, ρ_2:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"] & \mathscr{G}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_2"] & \mathscr{H}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(V) \arrow[r] & \mathscr{G}(V) \arrow[r] & \mathscr{H}(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann muss notwendigerweise ρ_3 auch surjektiv sein! $\mathscr{H}$ ist also welk.

zu (d): Das ist trivial nach Definition der Bildgarbe.

zu (e): Da ist auch klar. □

1.27 Übung: (Wolkenkratzergarben)

Es sei X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt. A sei eine abelsche Gruppe. Die Garbe $i_p(A)$ auf X wird folgendermaßen definiert:

$$i_p(A)(U) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \notin U \\ A, & \text{falls } p \in U \end{cases}$$

Dann gilt

(a) $i_p(A)$ ist eine Garbe.

(b) Ist $x \in X$, so gilt

$$(i_P(A))_x = 0, \text{ falls } x \notin \overline{\{p\}}$$

(d.h. wenn es eine offene Umgebung U von x in X gibt, die p nicht enthält).

Ist dagegen $x \in \overline{\{p\}}$, d.h. gilt $p \in U$ für alle offenen Umgebungen von x, so ist

$$(i_p(A))_x = A.$$

(c) Es sei $Y = \overline{\{p\}} \subset X$ die abgeschlossene Hülle von $\{p\}$ in X und $i : Y \to X$ sei die Inklusionsabbildung. Dann ist $i_p(A) = i_*(A_Y)$.

Beweis zu (a): Die Restriktionsabbildungen $\rho_{U,V} : i_p(A)(U) \to i_p(A)(V)$ sind entweder die Identität auf A oder die Nullabbildung. $i_p(A)$ ist offensichtlich eine Prägarbe.

Wir zeigen, dass $i_p(A)$ auch eine Garbe ist.

Zu (G1): Es sei $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ und $s \in i_p(A)(U)$ mit $s \mid V_i = 0$ für alle $i \in I$. Ist $p \in U$, so gibt es ein i mit $p \in V_i$ und somit ist $s = s \mid V_i = 0$. Ist $p \notin U$, so ist nichts zu zeigen.

Zu (G2): Es sei $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ und für $i \in I$ sei $s_i \in i_p(A)(V_i)$ gegeben mit

$$s_i \mid V_i \cap V_j = s_j \mid V_i \cap V_j \text{ für alle } i, j \in I.$$

Ist $p \notin U$, so ist natürlich auch $p \notin V_i$ und somit ist $s_i = 0$ und es ist $s = 0 \in i_p(A)(U)$ mit $s \mid V_i = s_i$ für alle $i \in I$.

Es sei nun $p \in U$. Dann ist $p \in V_i($ für ein $i \in I$ und wir setzen $s = s_i \in A = i_p(A)(U) = i_p(A)(V_i)$. Es gilt offensichtlich auch $s = s_j$ für alle $j \in I$ mit $p \in V_j$ und natürlich $s \mid V_j = s_j = 0$ für alle $j \in I$ mit $p \notin V_j$. Damit ist (G2) bewiesen.

zu (b): Ist $x \in \overline{\{p\}}$, so ist $p \in U$ für alle offenen Umgebungen U von x und da für alle offenen Mengen U mit $p \in U$ $i_p(A)(U) = A$ gilt, folgt

$$i_p(A)_x = \varinjlim_{U \ni x} i_p(A)(U) = A.$$

Für $x \notin \overline{\{p\}}$ gibt es eine offene Umgebung U von x mit $p \notin U$. Damit ist

$$i_p(A)(V) = 0$$

für alle offenen Umgebungen V von x mit $V \subset U$, also auch

$$i_p(A)_x = 0.$$

zu (c): Da $Y = \overline{\{p\}}$ irreduzibel ist, gilt $A_Y(V) = A$ für alle nichtleeren offenen Mengen $V \subset Y$. Somit ist

$$(i_*A_Y)(U) = A_Y(U \cap Y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } U \cap Y = \emptyset \\ A & \text{falls } U \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$$

Da die Bedingung $U \cap Y \neq \emptyset$ zur Bedingung $p \in U$ äquivalent ist, folgt

$$i_*A_Y = i_p(A)$$

$i_p(A)$ heißt die *Wolkenkratzergarbe* auf X im Punkt p.

1.28 Übung: (direkte Summe von Garben)

Es sei X ein noetherscher topologischer Raum, $(\mathscr{F}_\alpha)_{\alpha\in M}$ sei eine Familie abelscher Garben auf X, wobei M eine beliebige Indexmenge sei. Für $U \subset X$ offen sei

$$\mathscr{F}(U) := \bigoplus_{\alpha\in M} \mathscr{F}_\alpha(U)$$

(also $s \in \mathscr{F}(U) \iff s = (s_\alpha)_{\alpha\in M}$ mit $s_\alpha \in \mathscr{F}_\alpha(U)$ und $s_\alpha = 0$ für alle bis auf endlich viele $\alpha \in M$)

Für $V \subset U$, V,U offen in X, sei

$$\rho_{U,V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$

die Abbildung $\rho_{U,V}((s_\alpha)_{\alpha\in M}) = \rho_{U,V}(s_\alpha))_{\alpha\in M}$. Weiter sei $\theta_\alpha(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ die Inklusion von $\mathscr{F}_\alpha(U)$ auf den α-ten Summanden von $\mathscr{F}(U)$. Dann gilt: $\mathscr{F}$ ist eine abelsche Garbe und $(\mathscr{F}, (\theta_\alpha)_{\alpha\in M})$ ist die direkte Summe (Coprodukt) der $\mathscr{F}_\alpha$ in der Kategorie der abelschen Garben auf X.

Beweis: Die Prägarbe $\mathscr{F}$ ist eine Garbe weil X noethersch ist.

In einem noetherschen topologischen Raum ist nämlich jede offene Teilmenge quasikompakt. (Übung)

Damit braucht man die Garbeneigenschaft (G2) nur für *endliche* offene Überdeckungen $U = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ zu beweisen und das geht problemlos komponentenweise. (Übung)

1.29 Übung: (Rationale Funktionen auf Kurven)

Es sei X eine integre glatte projektive Kurve über einen algebraisch abgeschlossenen Körper K. Ist $p \in X$, so ist der lokale Ring $\mathscr{O}_p$ von X in p ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K(X)$, dem Körper der rationalen Funktionen auf X.

Man setzt

$$H_p := K(X)/\mathscr{O}_p.$$

Dies ist die additive abelsche Gruppe der *Hauptteile* von rationalen Funktionen in p. Zwei rationale Funktionen $r_1, r_2 \in K(X)$ haben denselben Hauptteil in p, wenn $r_1 - r_2$ in p regulär ist.

Ist etwa t uniformisierender Parameter in p und hat $r_1 \in K(X)$ die ‘Potenzreihenentwicklung’ (hier ist die Laurentreihe gemeint)

$$r_1 = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu t^\nu \in K[\![t]\!]_t$$

so ist

$$r_2 = \sum_{\nu=-n}^{-1} a_\nu t^\nu = a_{-n}t^{-n} + \ldots + a_{-1}t^{-1} \in K(X)$$

und

$$r_1 - r_2 = \sum_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu t^\nu \in \mathscr{O}_p$$

r_2 ist der ‘Hauptteil’ von r_1, genauer: der kanonische Repräsentant des Hauptteils von r_2 bezüglich des uniformisierenden Parameters t.

Hier ist also

$$H_p \cong t^{-1}K[t^{-1}].$$

Weiter gilt: Die Garbe $\mathscr{K}/\mathscr{O}$ ist isomorph zur direkten Summe der Wolkenkratzergarben $i_p(H_p)$, $p \in X$, wobei $\mathscr{K}$ die konstante Garbe der rationalen Funktionen auf X ist.

Insbesondere erhält man die exakte Cohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow K(X) \longrightarrow \bigoplus_{p\in X} H_p \longrightarrow H^1(X,\mathscr{O}) \longrightarrow 0$$

aus der kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}/\mathscr{O} \longrightarrow 0$$

Beweis: Wir beweisen, dass

$$\mathscr{K}/\mathscr{O} \cong \bigoplus_{p\in X} i_p(H_p).$$

Dazu sei $U \subset X$ offen. Es wird

$$\varphi(U) : (\mathscr{K}/\mathscr{O})(U) \longrightarrow \left(\bigoplus_{p\in X} i_p(H_p) \right)(U)$$

wie folgt definiert.

Es sei $h \in (\mathscr{K}/\mathscr{O})(U)$. Dann gibt es eine endliche Überdeckung $U = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ von U, rationale Funktionen $r_i \in \mathscr{K}(V_i)$, so dass r_i ein Repräsentant von $h \mid V_i$ ist. Es folgt also

$$r_j - r_i \in \mathscr{O}(V_i \cap V_j)$$

Da r nur endlich viele Pole besitzt, ist

$$\operatorname{supp}(h) = \{p \in X \mid h_p \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{m} \text{Pole } (r_i \mid V_i)$$

eine endliche Menge und folglich ist

$$h = \bigoplus_{p \in \operatorname{supp}(h)} h_p \in \bigoplus_{p \in U} H_p = \left(\bigoplus_{p \in X} i_p(H_p) \right)(U),$$

Damit haben wir eine injektive Abbildung

$$\varphi(U) : (\mathscr{K}/\mathscr{O})(U) \longrightarrow \left(\bigoplus_{p \in X} i_p(H_p) \right)(U),$$

die offensichtlich mit Restriktionen verträglich ist. $\varphi(U)$ ist auch surjektiv, denn $p \in X$ und $\gamma \in i_p(H_p)(U)$, also $\gamma_p \in H_p$ und $\gamma_p = 0$ für $q \in U \backslash p$, so kann man eine Umgebung V_1 von p wählen und eine rationale Funktion $r_1 \in \mathscr{K}(V_1)$, die γ_p repräsentiert und auf $V_1 \backslash \{p\}$ regulär ist.

Weiter wähle man dann $V_2 = U \backslash \{p\}$ und $r_2 = 0$. Dann definiert (r_1, r_2) einen Schnitt $s \in \mathscr{K}/\mathscr{O}(U)$ mit $\varphi(U)(s) = \gamma$. □

1.30 Übung: (Idealgarben von Untervarietäten)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und X sei eine integre quasiprojektive Varietät über K.

Es sei $Y \subset X$ eine Zariski - abgeschlossene Teilmenge. Für $U \subset X$ offen sei $\mathscr{I}_Y(U)$ das Ideal der regulären Funktionen $f : U \to K$, die auf $U \cap Y$ verschwinden. $i : Y \to X$ sei die Inklusion

(a) Die Prägarbe $\mathscr{I}_Y$ ist eine Untergarbe von $\mathscr{O}_Y$.

(b) Die Garbe $\mathscr{O}_Y = (\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y)/Y$ auf Y heißt die Strukturgarbe von Y. Es gilt $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y = i_*\mathscr{O}_Y$.

(c) Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow i_*\mathscr{O}_Y \longrightarrow 0$$

induziert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{I}_Y) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow[\rho]{} \Gamma(X, \mathscr{O}_Y) \longrightarrow \cdots$$

Dabei ist die Abbildung ρ im allgemeinen nicht exakt.

zu (c): Ist $X = \mathbb{P}^1$, $Y = \{P, Q\}$, so ist $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = K$, $\Gamma(X, \mathscr{O}_Y) = K \times K$ und ρ ist die Diagonalabbildung $\rho(a) = (a, a)$, also nicht surjektiv.

2 Schemata

2.1 Definition: Es sei A ein Ring (wie immer kommutativ mit Eins). Die Menge aller Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ bezeichnen wir mit $X = \operatorname{Spec} A$. Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so wird das Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subset X$ als die Menge aller Primideale, die $\mathfrak{a}$ enthalten, definiert:

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\} = \{\mathfrak{p} \in X \mid \forall f \in \mathfrak{a} : f(\mathfrak{p}) = 0\}$$

Dabei definiert man $f(\mathfrak{p}) := f \bmod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$ und nennt $f(\mathfrak{p})$ den Wert von f im Punkt $\mathfrak{p}$.

2.2 Lemma: Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i \subset A$ gelten die Regeln:

(a) $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

(b) $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(c) $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}) \iff \sqrt{\mathfrak{a}} \supset \sqrt{\mathfrak{b}}$

Beweis: (a) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \iff \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.
(b) $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p} \iff \forall i \in I : \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$.
(c) Wir benutzen die bekannte Aussage

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p} \in X}} \mathfrak{p}.$$

Dann ist alles tautologisch. □

2.3 Definition: (Topologie und Strukturgarbe auf $\operatorname{Spec} A$)
Es sei A ein Ring, $X = \operatorname{Spec} A$.

(a) $Y \subset X$ heißt abgeschlossen $\iff$ $\exists$ Ideal $\mathfrak{a} \subset A$: $Y = V(\mathfrak{a})$. Nach 2.2 ist dadurch eine Topologie auf X definiert.

(b) Es sei $U \subset X$ offen. Ist $\mathfrak{p} \in U$, so bezeichne $A_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von A in $\mathfrak{p}$, d.h. $A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in A \backslash \mathfrak{p}\}$. Man definiert $\mathscr{O}(U)$ als Unterring des Produktrings $\prod\limits_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$: Eine Familie $s = (s(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in U}$ mit $s(p) \in A_\mathfrak{p}$ gehört zu $\mathscr{O}(U)$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

($*$) $\forall p \in U\ \exists\, a, f \in A$, $V \subset U$ offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ in U, so dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ gilt:

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \text{ in } A_{\mathfrak{q}}.$$

(Insbesondere ist natürlich $f(\mathfrak{q}) \neq 0$ für alle $\mathfrak{q} \in V$.)

Offensichtlich ist $\mathscr{O}(U)$ ein Ring und man hat Restriktionshomomorphismen $\rho_{U,V} : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ für $V \subset U$ und damit eine Prägarbe $\mathscr{O}$ von Ringen auf X. Nach Konstruktion ist $\mathscr{O}$ sogar eine Garbe. Das Paar $(X, \mathscr{O})$ heißt das *Spektrum* von A. $\mathscr{O}$ heißt die *Strukturgarbe*.

(c) Es sei $f \in A$. Mit $D(f)$ bezeichnen wir die offene Menge $D(f) = X \backslash V(f)$ $= \{\mathfrak{p} \in X \mid f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$. Die offenen Menge $D(f), f \in A$, bilden eine Basis der Topologie auf X.

2.4 Satz: Es sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathscr{O}$ sei die Strukturgarbe auf X.

(a) Es sei $\mathfrak{p} \in X$. Die kanonischen Abbildungen $\mathscr{O}(U) \to A_{\mathfrak{p}}$, $s \mapsto s(\mathfrak{p})$, wobei U eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ ist induzieren einen Isomorphismus

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}.$$

Die Lokalisierung von A in $\mathfrak{p}$ ist also der Halm der Strukturgarbe im Punkt $\mathfrak{p}$.

(b) Es sei $f \in A$. Die kanonische Abbildung $A_f \to \mathscr{O}(D(f))$, $\frac{a}{f^k} \mapsto s$ wobei

$$s(\mathfrak{p}) := \frac{a}{f^k} \text{ in } A_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in D(f) \text{ (d.h. } f \notin \mathfrak{p}),$$

ist ein Isomorphismus.

Die Schnitte in der Strukturgarbe über der offenen Menge $D(f)$ sind also exakt die Elemente in A_f.

(c) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$A \to \mathscr{O}(X).$$

Beweis:

(a) Zunächst zeigen wir: Die Abbildung $\mathscr{O}_p \to A_{\mathfrak{p}}$ ist surjektiv. Es sei $b = \frac{a}{f} \in A_{\mathfrak{p}}$ mit $a \in A$, $f \in A \backslash \mathfrak{p}$. Dann ist $U = D(f)$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ und $\frac{a}{f} \in A_f$ definiert einen Schnitt $s \in \mathscr{O}(U)$ mit $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$ für alle $\mathfrak{q} \in U$.

Insbesondere ist $s(\mathfrak{p}) = b$ und der Keim von s in $\mathfrak{p}$ wird unter $\mathscr{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$ auf b abgebildet. Deshalb ist $\mathscr{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$ surjektiv.

Jetzt zeigen wir, dass $\mathscr{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$ injektiv ist. Es sei $s_\mathfrak{p} \in \mathscr{O}_\mathfrak{p}$ der Keim von $s \in \mathscr{O}(U)$, wobei U eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ ist. Es sei nun $s(\mathfrak{p}) = 0$ in $A_\mathfrak{p}$. Ohne Einschränkung sei $U = D(f)$ mit $f \in A\backslash\mathfrak{p}$ und s der von $\frac{a}{f} \in A_f$ definierte Schnitt. $s(\mathfrak{p}) = 0$ bedeutet dann, dass $\frac{a}{f} = 0$ in $A_\mathfrak{p}$ und somit ein $g \in A\backslash\mathfrak{p}$ existiert mit $ga = 0$. Auch $V = D(gf) = D(g) \cap U$ ist offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ und $s \mid V$ wird durch den Bruch $\frac{ga}{gf} \in A_{gf}$ induziert, ist also Null, weil $ga = 0$. Aus $s \mid V = 0$ folgt natürlich $s_\mathfrak{p} = 0$. Die Abbildung $\mathscr{O}_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$ ist also injektiv.

(b) Dies ist der schwierige Teil des Satzes: Zunächst zeigen wir:

(i) Die Abbildung $A_f \to \mathscr{O}(D(f))$ ist injektiv. Es sei $b = \frac{a}{f^k} \in A_f$ und $\frac{a}{f^k} = 0$ in $A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$. Zu jedem $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ gibt es also ein $g_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$, so dass $g_\mathfrak{p} a = 0$, d.h. $g_\mathfrak{p} \in Ann_A(a) =: \mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{p} \in D(f)$, so ist also $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ und das heißt $V(\mathfrak{a}) \subset V(f)$, also $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Damit gilt $f^m a = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, d.h. $b = 0$. Das beweist sie Injektivität der Abbildung.

Jetzt kommt der schwierige Teil:

(ii) Die Abbildung $A_f \to \mathscr{O}(D(f))$ist surjektiv.

Es sei dazu $s \in \mathscr{O}(D(f))$. Wir suchen ein Element $\frac{a}{f^n}$, das s induziert. Nach Definition von $\mathscr{O}(D(f))$ geht das zunächst nur lokal:

Es gibt eine Indexmenge I, Elemente $h_i \in A$, und $a_i \in A$, so dass $D(h_i) \subset D(f)$,

$$s \mid D(h_i) = \frac{a_i}{h_i}$$

und $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$.

Es folgt $V(f) = \bigcap_{i \in I} V(h_i) = V\left(\sum_{i \in I}(h_i)\right)$ und somit ist $f^n \in \sum_{i \in I}(h_i)$ für eine $n \in \mathbb{N}$, sagen wir $\{1, \ldots, m\} \subset I$ und

$$f^n \in \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$$

und folglich ist $V(\langle h_1, \ldots, h_m \rangle) \subset V(f)$, d.h. $D(f) = D(h_1) \cup \ldots \cup D(h_m)$.

Da $D(h_i h_j) = D(h_i) \cap D(h_j)$ und

$$\frac{a_i}{h_i} \mid D(h_i) \cap D(h_j) = s \mid D(h_i) \cap D(h_j) = \frac{a_j}{h_j} \mid D(h_i) \cap D(h_j)$$

folgt aus (i) $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$ in $A_{h_i h_h}$ für $1 \leq i < j \leq m$.

Da nur endlich viele Indizes vorkommen, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $(h_i h_j)^k (a_i h_j - a_j h_i) = 0$ für alle i, j.

Es sei $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$f^N = \sum_{i=1}^{n} b_i h_i^{k+1} \text{ für geeignete } b_i \in A.$$

Das geht, weil $f \in \sqrt{\langle h_1, \ldots, h_m \rangle} = \sqrt{\langle h_1^{k+1}, \ldots, h_m^{k+1} \rangle}$.

Man setze

$$a := \sum_{i=1}^{m} b_i h_i^k a_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h_j^{k+1} a &= \sum_{i=1}^{m} b_i h_i^k h_j^k h_j a_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} b_i h_i^k h_j^k h_i a_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} b_i h_i^{k+1} \right) h_j^k a_j = f^N h_j^k a_j. \end{aligned}$$

Es folgt $\frac{a}{f^N} \mid D(h_j) = \frac{a_j}{h_j} = s \mid D(h_j)$.

Damit ist $s \in \mathscr{O}(D(f))$ das Bild von $\frac{a}{f^N} \in A_f$ unter der kanonischen Abbildung

$$A_f \to \mathscr{O}(D(f)).$$

Damit ist (b) vollständig bewiesen.

(c) Dies folgt aus (b) für $f = 1$.

$\square$

2.5 Definition: (geringter Raum)

(a) Ein Paar $(X, \mathscr{O}_X)$ heißt *geringter Raum*, wenn X ein topologischer Raum und $\mathscr{O}_X$ eine Garbe von Ringen (kommutativ mit Eins) auf X ist.

Man nennt X den $(X, \mathscr{O}_X)$ zugrunde liegenden topologischen Raum und $\mathscr{O}_X$ die Strukturgarbe auf X.

Aus Bequemlichkeit schreibt man oft einfach X für einen geringten Raum. Es versteht sich dann von selbst, dass auch die Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ zu X gehört.

(b) Es seien $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ geringte Räume. Ein Morphismus von $(X, \mathscr{O}_X)$ nach $(X, \mathscr{O}_Y)$ ist ein Paar (f, θ) bestehend aus einer stetigen Abbildung

$$f : X \to Y$$

und einem Morphismus von Garben von Ringen auf Y:

$$\theta : \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X.$$

D.h. Für jede offen Menge $V \subset Y$ ist ein Ringhomomorphismus

$$\theta_V : \mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$$

gegeben und für $W \subset V \subset Y$ ist

$$\theta_W(g \mid W) = \theta_V(g) \mid f^{-1}(W)$$

für alle $g \in \mathscr{O}_Y(V)$.

(c) Ein geringter Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ heißt *lokal geringt*, wenn alle Halme der Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ lokale Ringe sind. Es sei $x \in X$. Das maximale Ideal in $\mathscr{O}_{X,x}$ wird dann mit $\mathfrak{m}_{X,x}$ bezeichnet. Der Restklassenkörper $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ wird mit $k(x)$ bezeichnet und heißt auch der *Restklassenkörper* des Punktes x in X.

Ist $U \subset X$ offen, $g \in \mathscr{O}_X(U)$, so definiert man den *Wert* von g in x durch

$$g(x) := g_x \bmod \mathfrak{m}_{X,x} \in k(x).$$

(d) Es seien $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ lokal geringte Räume. Ein Morphismus lokal geringter Räume von $(X, \mathscr{O}_X)$ nach $(Y, \mathscr{O}_Y)$ ist ein Morphismus

$$(f, \theta) : (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$$

mit folgender zusätzlicher Eigenschaft:

Für jeden Punkt $x \in X$ ist die von den Abbildungen $\theta_V : \mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$, V offene Umgebung von $f(x)$, induzierte Halmabbildung

$$\theta_x :, \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to, \mathscr{O}_{X,x}$$

lokal, d.h. $\theta_x(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$. Für jeden Punkt $x \in X$ wird dann durch θ_x auch eine Körpererweiterung

$$k(f(x)) \hookrightarrow k(x)$$

induziert.

Die Komposition von Morphismen lokal geringter Räume ist in naheliegender Weise definiert. Man erhält so die Kategorie $\mathscr{R}$ der lokal geringten Räume.

Es gibt einen natürlichen Vergißfunktor

$$\mathscr{R} \to \mathscr{T}op,\ (X,\mathscr{O}_X) \mapsto X,\ (f,\theta) \mapsto f.$$

$(f,\theta) : (X,\mathscr{O}_X) \to (Y,\mathscr{O}_Y)$ ist ein Isomorphismus, wenn $f : X \to Y$ topologisch ist und wenn $\theta : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ ein Isomorphismus von Garben von Ringen ist.

2.6 Satz: (a) Es sei A ein Ring. Dann ist $\operatorname{Spec} A$ ein lokal geringter Raum.

(b) Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. φ induziert einen Morphismus lokal geringter Räume

$$\varphi^* = (f,\theta) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A.$$

Dadurch ist ein kontravarianter Funktor $\operatorname{Spec} : \mathscr{R}ings \to \mathscr{R}$ von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der lokal geringten Räume definiert.

(c) Es seien A,B Ringe. Zu jedem Morphismus lokal geringter Räume $(f,\theta) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$, so dass $\varphi^* = (f,\theta)$

Beweis:

(a) siehe 2.4(a).

(b) Es sei $\varphi : A \to B$ Ringhomomorphismus. $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ sei die Abbildung

$$f(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

In der Tat: $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ ist Primideal, wenn $\mathfrak{p} \subset B$ Primideal ist.

Ist nämlich $a,b \in A$ mit $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, so ist $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \mathfrak{p}$, also $\varphi(a)$ oder $\varphi(b)$ in $\mathfrak{p}$ d.h. $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ oder $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(\mathfrak{a})) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid f(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a})\} = \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{a}\} = \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{p} \supset \varphi(\mathfrak{a})B\} \\ &= V(\varphi(\mathfrak{a})B) \end{aligned}$$

Das Urbild einer abgeschlossenen Menge in $\operatorname{Spec} A$ unter der Abbildung f ist also abgeschlossen in $\operatorname{Spec} B$. f ist somit stetig.

Wir kommen zur Definition von θ.

Es sei $a \in A \backslash \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Dann ist $\varphi(a) \in B \backslash \mathfrak{p}$ und folglich induziert $\varphi : A \to B$ einen Ringhomomorphismus

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}.$$

Es sei $V \subset \operatorname{Spec} A$ offen. Dann wird

$$\theta_V : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \to \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(V))$$

wie folgt definiert.

Es sei $s \in \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)$. Nach Definition ist s eine Familie $(s(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{q} \in V}$ von Elementen $s(\mathfrak{q}) \in A_{\mathfrak{q}}$ mit einer Verträglichkeitsbedingung.

Wir definieren $\theta_V(s) \in \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(V))$ durch

$$(\theta_V(s))(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{q})),$$

wobei $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$, $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V$. In der Tat ist dadurch ein Schnitt $\theta_V(s)$ definiert, denn ist

$$s \mid D(g) \cap V = \frac{a}{g} \ (a, g \in A),$$

so ist $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{g}$ für alle $\mathfrak{q} \in D(g) \cap V$ und somit gilt für $\mathfrak{p} \in D(\varphi(g)) \cap f^{-1}(V)$

$$\begin{aligned} \theta_V(s)(\mathfrak{p}) &= \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{q})) = \varphi_{\mathfrak{p}}\left(\frac{a}{g}\right) \\ &= \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in D(g) \cap V$.

Es gilt also

$$\theta_V(s) \mid D(\varphi(g)) \cap f^{-1}(V) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)}.$$

Die Bedingung $(*)$ in Definition 2.3(b) ist also erfüllt. Damit ist $\theta_V(s) \in \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(V))$.

$$\theta = (\theta_V)_{V \subset \operatorname{Spec} A \text{ offen}}$$

ist ein Morphismus von Ringgarben

$$\theta : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}.$$

Wir müssen die Verträglichkeit mit Restriktionen überprüfen (siehe 2.5(b)): Seien $W \subset V \subset \operatorname{Spec} A$ offen.

Dann gilt für $s \in \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)$, $\mathfrak{p} \in f^{-1}(W)$:

$$\begin{aligned}(\theta_V(s) \mid f^{-1}(W))(\mathfrak{p}) &= \theta_V(s)(\mathfrak{p}) = \\ \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{q})) &= \varphi_{\mathfrak{p}}((s \mid W)(\mathfrak{q})) \\ &= \theta_W(s \mid W)(\mathfrak{p}),\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$. Also gilt

$$\theta_V(s) \mid f^{-1}(W) = \theta_W(s \mid W).$$

Die induzierten Abbildungen in den Halmen sind die Abbildungen $\varphi_{\mathfrak{p}}$:

$$\theta_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p}} : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A, f(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B, \mathfrak{p}}$$

Außerdem hat man für $g \in A$ das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(g)) \arrow[r, "\theta_{D(g)}"] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(f^{-1}(D(g))) \\ A_g \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\varphi_g"'] & B_{\varphi(g)} \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\varphi_g\left(\frac{a}{g^k}\right) := \frac{\varphi(a)}{\varphi(g)^k}$.

Man rechnet leicht nach, dass die ganze Geschichte funktoriell ist, also ein kontravarianter Funktor

$$\operatorname{Spec} : \mathscr{R}ings \to \mathscr{R}$$

definiert ist (Übung).

(c) Es sei ein Morphismus lokal geringter Räume

$$(f, \theta) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

gegeben. Insbesondere hat man *lokale* Homomorphismen

$$\theta_{\mathfrak{p}} : A_{f(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \operatorname{Spec} B.$$

Wir definieren $\varphi : A \to B$ durch folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \arrow[r, "\theta_{\operatorname{Spec} A}"] & \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \\ A \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\varphi"'] & B \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Behauptung: $\varphi^* = (f, \theta)$.

Nach Definition der lokalen Homomorphismen $\theta_\mathfrak{p}$ hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \\ A_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "\theta_\mathfrak{p}"'] & B_\mathfrak{p} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Für $a \in A$ ist das $\theta_\mathfrak{p}(\frac{a}{1}) = \frac{\varphi(a)}{1}$. Für $b \in A \setminus f(\mathfrak{p})$ muss $\theta_\mathfrak{p}(\frac{b}{1}) = \frac{\varphi(b)}{1}$ eine Einheit in $B_\mathfrak{p}$ sein, und somit gilt $\varphi(b) \in B \setminus \mathfrak{p}$, also $A \setminus f(\mathfrak{p}) \subset A \setminus \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Anderseits gilt durch $f(\mathfrak{p}) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, denn $\theta_\mathfrak{p}$ ist lokal: Für $a \in f(\mathfrak{p})$ gilt $\frac{\varphi(a)}{1} = \theta_\mathfrak{p}(\frac{a}{1}) \in m(B_\mathfrak{p}) = \frac{b}{c}$ mit $b \in \mathfrak{p}$, $c \in B \setminus \mathfrak{p}$. Es folgt $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$, also $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Damit ist $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Die stetige Abbildung f ist also die zum Morphismus φ^* gehörige Abbildung, und es gilt $\theta_\mathfrak{p} = \varphi_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Daraus folgt dann auch, dass $\varphi^* = (f, \theta)$.

$\square$

2.7 Definition: (affines Schema, Schema)

Ein lokal geringter Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ heißt *affines Schema*, wenn er als lokal geringter Raum zum Spektrum eines Ringes isomorph ist.

Ein lokal geringter Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ heißt *Schema*, wenn zu jedem Punkt $p \in X$ eine offene Umgebung U von p existiert, so dass $(U, \mathscr{O}_X \mid U)$ ein affines Schema ist.

Wir erhalten so die Kategorie $\mathscr{S}ch$ der Schemata als volle Unterkategorie der Kategorie $\mathscr{R}$ der lokal geringten Räume.

2.8 Beispiel: (a) Es sei K ein Körper und $X = \{p\}$ ein topologischer Raum mit einem einzigen Punkt. Dann ist (X, K_X) ein lokal geringter Raum, isomorph zum Spektrum von K, also ein affines Schema.

(b) Sei R ein diskreter Bewertungsring, also noetherscher lokaler Integritätsbereich, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist. Außerdem ist R kein Körper.

Dann ist $T = \operatorname{Spec} R = \{(0), \mathfrak{m}\}$ ein topologischer Raum mit zwei Punkten, dem Nullideal $\omega := (0)$ und dem maximalen Ideal $p_0 = \mathfrak{m}$.

p_0 ist abgeschlossener Punkt in T, $\{p_0\} = V(\mathfrak{m})$. Dagegen ist $\overline{\{\omega\}} = V(0) = T$.

Man sagt: ω ist der *generische Punkt* von T. Es sei $f \in R$ ein Erzeuger von $\mathfrak{m}$. Dann gilt $D(f) = R\backslash V(f) = R\backslash V(\mathfrak{m}) = \{\omega\}$.

Man kann also sagen: ω ist ein "offener" Punkt. Es sei $\mathscr{O}$ die Strukturgarbe auf T. Dann ist (weil T die einzige offene Umgebung von p_0 ist)

$$\mathscr{O}_{p_0} = \mathscr{O}(T) = R \text{ und}$$
$$\mathscr{O}_{\omega} = \mathscr{O}(\{\omega\}) = \mathscr{O}(D(f)) = R_f = \{af^k \mid a \in R^{\times}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Da $\omega = (0)$, ist auch $\mathscr{O}_{\omega} = R_{(0)} = K$, wobei K der Quotientenkörper von R ist. Natürlich ist $K = R_f$.

Es gilt auch

$$k(p_0) = R/\mathfrak{m},\ k(\omega) = K.$$

Untersuchen wir die Morphismen

$$\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$$

geringter Räume.

Es gibt nur zwei Abbildungen

$$f_1, f_2 : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R,\ \text{nämlich}$$
$$f_1(\omega) = \omega, \quad f_2(\omega) = p_0.$$

Beide lassen sich zu einem Morphismus geringter Räume erweitern.

$$\theta_1 : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R} \to f_{1*}\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} K}$$

wird induziert von der Inklusion $i : R \to K$. (f_1, θ_1) ist der zu $i : R \to K$ gehörige Morphismus lokal geringter Räume.

Die zweite Abbildung $f_2 : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ liefert

$$\theta_2 : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R} \to f_{2*}\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} K}$$

mit $\theta_2(T) : R \to K$, $\theta_2(\{\omega\}) = 0$.

Jeder Ringhomomorphismus $R \to K$ ist für $\theta_2(T)$ erlaubt. Wählt man $\theta_2(T)$ als die Inklusion $i : R \to K$, so ist (f_2, θ_2) zwar ein Morphismus geringter Räume aber *nicht* lokal!

Man kann aber eventuell den Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ in K einbetten. Wählt man in dieser Situation

$$\theta_2(T) \text{ als Komposition } R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m} \hookrightarrow K,$$

so erhält man einen Morphismus lokal geringter Raum, also eine Morphismus affiner Schemata

$$\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R/\mathfrak{m} \to \operatorname{Spec} R.$$

(c) Es sei K ein Körper, x eine Unbestimmte. Dann heißt

$$\mathbb{A}_K^1 = (\operatorname{Spec} K[x], \mathscr{O})$$

die affine Gerade über K. Abgeschlossene Punkte in $\mathbb{A}_K^1$ sind die Hauptideale (q), wobei $q \in K[x]$ ein irreduzibles normiertes Polynom von Grad $d > 0$ ist. Das Nullideal definiert den *generischen Punkt* $\zeta = (0)$, dessen abgeschlossene Hülle der ganze Raum ist. ζ liegt in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge von $\operatorname{Spec} K[x]$.

Ist $p = (q) \in \operatorname{Spec} K[x]$, so ist der Restklassenring $K[x]/(q)$ ein Körper, also gilt hier: $k(p) = K[x]/(q)$ ist endliche Erweiterung von K vom Grad $d = \operatorname{grad} q$.

Der lokale Ring von $\mathbb{A}_K^1$ in p ist ein diskreter Bewertungsring

$$\mathscr{O}_p = K[x]_{(q)}$$

mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_p = (q)K[x]_{(q)}$.

q ist also ein uniformisierender Parameter in $\mathscr{O}_p$. Natürlich ist

$$k(p) = K[x]/(q) \cong \mathscr{O}_p/\mathfrak{m}_p.$$

Der lokale Ring von $\mathbb{A}_K^1$ im generischen Punkt ζ ist gleichzeitig der Restklassenkörper von ζ.

$$\mathscr{O}_\zeta = k(\zeta) = K(x),$$

wobei $K(x)$ der Quotientenkörper von $K[x]$ ist.

(d) Die affine Ebene über K ist definiert als

$$\mathbb{A}_K^2 = (\operatorname{Spec} K[x,y], \mathscr{O}).$$

Wir betrachten den Fall, dass K algebraisch abgeschlossen ist, etwas näher.

Ist $\mathfrak{p} \subset K[x,y]$ Primideal, $\mathfrak{p} \neq (0)$ und $\mathfrak{p}$ nicht maximal, so ist $\mathfrak{p} = (q)$ mit einem irreduziblen Polynom $q \in K[x,y]$.

Der Restklassenring $A = K[x,y]/\mathfrak{p}$ ist dann der affine Koordinatenring der ebenen Kurve mit Gleichung q.

Nach dem Entsprechungssatz ist

$$\begin{array}{rcl} V(\mathfrak{p}) & \to & \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \mathfrak{q}/\mathfrak{p} \end{array}$$

eine Bijektion und sogar topologisch. Auf diese Weise wird $V(\mathfrak{p})$ ein affines Schema, isomorph zu $\operatorname{Spec} A$:

$$\operatorname{Spec} A \cong V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}_K^2.$$

Das Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} K[x,y]$ entspricht dem Nullideal in A und ist daher der generische Punkt von $\operatorname{Spec} A \cong V(\mathfrak{p})$.

Es gilt in der Tat $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.

Der generische Punkt von $\mathbb{A}_K^2$ liegt natürlich nicht in $V(\mathfrak{p})$. Er liegt ja in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge von $\mathbb{A}_K^2$, also auch in $D(q) = \mathbb{A}_K^2 \backslash V(q)$.

Der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ ist der Körper der rationalen Funktionen auf der Kurve $V(\mathfrak{p})$.

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz sind die maximalen Ideale in $K[x,y]$, d.h. die abgeschlossenen Punkte in $\mathbb{A}_K^2$ von der Form $\mathfrak{m} = (x-a, y-b)$ mit $(a,b) \in K^2$. Damit ist die Menge $\operatorname{Spm} K[x,y]$ der abgeschlossenen Punkte in $\mathbb{A}_K^2$ die klassische affine Ebene K^2.

Die Restklassenkörper abgeschlossener Punkte in $\mathbb{A}_K^2$ sind endliche Erweiterungen von K und da K algebraisch abgeschlossen ist, somit gleich K.

Um Schemata zu konstruieren, bietet sich die Methode des ‘Verklebens’ an.

2.9 Lemma: (Verkleben von Schemata)
Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Schemata. Für alle $i, j \in I$ sei eine Menge

$$U_{i,j} \subset X_i$$

gegeben. Weiter seien Isomorphismen

$$\varphi_{i,j} : U_{i,j} \to U_{j,i}$$

von Schemata gegeben, so dass die ‘Verklebungsbedingungen’ erfüllt sind:

(0) $U_{i,i} = X_i$, $\varphi_{i,i} = id_{X_i}$,

(1) $\varphi_{i,j}^{-1} = \varphi_{j,i}$

(2) $\varphi_{i,j}(U_{i,j} \cap U_{i,k}) = U_{j,i} \cap U_{j,k}$
und auf $U_{i,j} \cap U_{i,k}$ gilt $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$.

Dann heißt das System

$$\mathfrak{X} = (X_i, U_{i,j}, \varphi_{i,j})_{i,j\in I}$$

ein System von Verklebungsdaten.

Wir definieren den kovarianten Funktor

$$F_{\mathfrak{X}} = \mathscr{S}ch \to \mathscr{S}ets$$

wie folgt:

Ist Z ein Schema, so sei $F_{\mathfrak{X}}(Z)$ die Menge aller Familien $(f_i : X_i \to Z)_{i\in I}$ von Morphismen $f_i : X_i \to Z$, so dass für alle $i, j \in I$ gilt

$$f_i \mid U_{i,j} = f_i \circ \varphi_{i,j}. \tag{$*$}$$

Ist $f : Z \to Z'$ ein Morphismus von Schemata, so ist

$$f_* : F_{\mathfrak{X}}(Z) \to F_{\mathfrak{X}}(Z')$$

die Abbildung

$$f_*((f_i)_{i\in I}) = (f \circ f_i)_{i\in I}.$$

Man prüft leicht die Eigenschaft $(*)$ für die Familie $(f \circ f_i)_{i\in I}$ nach. Der Funktor $F_{\mathfrak{X}}$ ist darstellbar. Das bedeutet folgendes: Es gibt ein Schema X zusammen mit einer Familie $(\psi_i)_{i\in I} \in F_{\mathfrak{X}}(X)$, so dass die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(X,Z) & \to & F_{\mathfrak{X}}(Z), \\ f & \mapsto & f_*((\psi_i)_{i\in I}) \end{array}$$

eine Bijektion ist. Darüber hinaus gilt

(i) $\psi_i(X_i)$ ist offen in X und $\psi_i : X_i \to \psi_i(X_i)$ ist ein Isomorphismus.

(ii) $X = \bigcup\limits_{i\in I} \psi_i(X_i)$.

Beweis: Offensichtlich ist $F_{\mathfrak{X}}$ ein kovarianter Funktor. Wie bilden nun zunächst die disjunkte Vereinigung

$$\widetilde{X} = \bigsqcup_{i\in I} X_i$$

der Schemata X_i : $\varphi_i : X_i \to \widetilde{X}$ sei die Inklusion. $\widetilde{X}$ ist wieder ein Schema und enthält X_i als offenes Unterschema. Es gilt $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Das gesuchte Schema X wird nun als Quotient von $\widetilde{X}$ nach einer Äquivalenzrelation konstruiert.

Auf dem topologischen Raum $\widetilde{X}$ erklären wir die Relation $R \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ durch

$$(x,y) \in R \iff \exists\, i, j \in i : x \in U_{i,j},\ y \in U_{j,i}$$

und $y = \varphi_{i,j}(x)$.

Behauptung: R ist Äquivalenzrelation auf $\widetilde{X}$.

(a) R ist reflexiv: Wegen (0) ist $(x,x) \in R$ für alle $x \in \widetilde{X}$.

(b) R ist symmetrisch: Wegen (1) ist $x = \varphi_{j,i}(y)$, wenn $y = \varphi_{i,j}(x)$.

(c) R ist transitiv: Es seien $(x,y),(y,z) \in R$. Dann gibt es also $i,j,k \in I$, so dass $x \in U_{i,j}$, $y \in U_{j,i} \cap U_{j,k}, z \in U_{k,j}$ und $y = \varphi_{i,j}(x)$, $z = \varphi_{j,k}(y)$. Nach (1) und (2) folgt
$$x = \varphi_{ji}(y) \in U_{i,j} \cap U_{i,k}$$
und $z = \varphi_{j,k}(y) = \varphi_{j,k}(\varphi_{i,j}(x)) = \varphi_{i,k}(x)$, also ist $(x,z) \in R$.

Es sei nun $X = \widetilde{X}/R$ die Menge der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie: $\pi : \widetilde{X} \to X$ sei die Quotientenabbildung. Eine Menge $U \subset X$ ist nach Definition genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ in $\widetilde{X}$ offen ist.
Es sei $U_i = \pi(X_i)$. Dann ist
$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_i) &= \{x \in \widetilde{X} \mid \exists\, y \in X_i : (x,y) \in R\} \\ &= \bigsqcup_{i \in I} U_{j,i} \subset \widetilde{X} \text{ offen}, \end{aligned}$$
also ist U_i offen in X. Offensichtlich ist $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und die Komposition
$$\psi_i = \pi \circ \varphi_i : X_i \to X$$
ist eine topologische Abbildung von X_i auf das Bild $U_i = \psi_i(X_i)$.
Damit ist die topologische Seite der Konstruktion bewältigt. Jetzt führen wir die Strukturgarbe $\mathscr{O}$ auf X ein.
Es sei $U \subset X$ offen. Wir definieren $\mathscr{O}_X(U)$ als Unterring von $(\pi_* \mathscr{O}_{\widetilde{X}})(U)$. Nach Definition von $\widetilde{X}$ ist
$$\begin{aligned} (\pi_* \mathscr{O}_{\widetilde{X}})(U) &= \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(\pi^{-1}(U)) = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(\bigsqcup_{i \in I} \psi_i^{-1}(U)) \\ &= \prod_{i \in I} \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(U)) \end{aligned}$$
Es sei nun $\mathscr{O}_X(U)$ der Unterring aller Familien
$$s = (s_i)_{i \in I}$$
von Schnitten $s_i \in \mathscr{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(U))$ mit der Eigenschaft
$$(\theta_{j,i})_{U_{i,j} \cap \psi_i^{-1}(U)}(s_i \mid U_{i,j} \cap \psi_i^{-1}(U)) = s_j \mid U_{j,i} \cap \psi_j^{-1}(U),$$
wobei $\theta_{j,i} : \mathscr{O}_{U_{i,j}} \to \varphi_{j,i*} \mathscr{O}_{U_{j,i}}$ der zum Isomorphismus $\varphi_{j,i} : U_{j,i} \to U_{i,j}$ gehörige Garbenhomomorphismus sei. Man beachte, dass
$$\varphi_{j,i}^{-1}(U_{i,j} \cap \psi_i^{-1}(U)) = U_{j,i} \cap \psi_j^{-1}(U)$$

gilt.

Es sei $\theta : \mathscr{O}_X \to \pi_* \mathscr{O}_{\widetilde{X}}$ die Inklusion. Dann ist $(\pi, \theta) : \widetilde{X} \to X$ ein Morphismus lokal geringter Räume und die Einschränkung auf X_i ergibt den Isomorphismus $\psi_i : X_i \to U_i \subset X$.

Da $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $U_i \cong X_i$, U_i also ein Schema ist, ist auch X ein Schema. Für die Familie $(\psi_i)_{i \in I}$ gilt nach Konstruktion $\psi_i \mid U_{i,j} = \psi_j \circ \varphi_{ij}$, also ist $(\psi_i)_{i \in I} \in F_{\mathfrak{X}}(X)$.

Wir zeigen die universelle Eigenschaft:

Ist Z ein Schema, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(X, Z) & \to & F_{\mathfrak{X}}(Z) \\ f & \mapsto & f_*((\psi_i)_{i \in I}) \end{array}$$

eine Bijektion.

Zur Surjektivität: Es sei $(f_i)_{i \in I} \in F_{\mathfrak{X}}(Z)$. Man erhält den Morphismus

$$\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Z \text{ mit } \widetilde{f} \mid X_i = f_i.$$

Es gilt nun nur noch zu zeigen, dass ein Morphismus

$$f : X \to Z$$

mit $\widetilde{f} = f \circ \pi$ existiert.

Lokal auf $U_i \subset X$ kann man $\widehat{f_i} : U_i \to Z$ definieren:

$$\widehat{f_i} := f_i \circ \psi_i^{-1}.$$

Man beachte, dass $\psi_i : X_i \to U_i \subset X$ ein Isomorphismus von X_i auf die offene Menge $U_i \subset X$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f_i} \mid U_i \cap U_j = f_i \circ \psi_i^{-1} \mid U_i \cap U_j = f_i \circ \varphi_{ij}^{-1} \circ \psi_j^{-1} \mid U_i \cap U_j \\ = f_j \circ \psi_j^{-1} \mid U_i \cap U_j = \widehat{f_j} \mid U_i \cap U_j \end{aligned}$$

Damit gibt es einen Morphismus

$$f : X \to Z$$

mit $f \mid U_i = \widehat{f_i}$. Es folgt $f \circ \pi = \widetilde{f}$. □

Als Beispiel für das Verkleben von Schemata führen wir die Konstruktion der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_K$ über einem Körper vor.

2.10 Beispiel: Es sei K ein Körper und x eine Unbestimmte,

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} K[x] \\ X_2 &= X_1 \\ U_{12} &= U_{21} = \mathbb{A}^1_K \setminus \{p_0\} \end{aligned}$$

wobei $p_0 \in \mathbb{A}^1_K$ der abgeschlossene Punkt sei, der durch das maximale Ideal $(x) \subset K[x]$ definiert wird.

Die kanonische Inklusion

$$K[x] \subset K[x]_x = \{x^n f \mid f \in K[x], n \in \mathbb{Z}\}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\operatorname{Spec} K[x]_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^1_K \setminus \{p_0\} \subset \mathbb{A}^1_K.$$

Ein Verklebungsdatum wird durch einen Isomorphismus

$$\varphi_{12} : U_{12} \to U_{12},$$

also einen K-Algebraisomorphismus

$$\varphi : K[x]_x \to K[x]_x$$

gegeben. Wir wählen den Isomorphismus, der durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ bestimmt ist.

Durch Verkleben von X_1 und X_2 mittels φ_{12} erhalten wir die projektive Gerade

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_K &= (\mathbb{A}^1_K \sqcup \mathbb{A}^1_K)/R = (X_1 \sqcup X_2)/R \\ &= U_1 \cup U_2 \end{aligned}$$

mit $U_1 \cong \mathbb{A}^1_K$, $U_1 \cap U_2 \cong \operatorname{Spec} K[x]_x$.

Die Inklusion $K \subset K[x]$ induziert Morphismen

$$f_i : X_i \to \operatorname{Spec} K$$

mit $f_1 \mid U_{12} = f_2 \circ \varphi_{12}$

und somit auch einen Morphismus

$$\mathbb{P}^1_K \to \operatorname{Spec} K.$$

Auf diese Weise sind alle Ringe $\mathscr{O}(U)$, $U \subset \mathbb{P}^1_K$ offen, K-Algebren.

Wir führen ganz allgemein den projektiven Raum $\mathbb{P}^n_A$ über einem Ring als Schema zusammen mit einem Morphismus $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ ein.

Wir werden sogar noch allgemeiner die projektiven Schemata zu *graduierten* Ringen einführen.

2.11 Definition: Ein graduierter Ring ist ein Ring S zusammen mit einer Zerlegung $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ in additive Untergruppen, so dass $S_d S_e \subset S_{d+e}$ für alle $d, e \geq 0$. Die Elemente in S_d heißen homogen vom Grad d. S_0 ist ein Unterring von S und $S_+ = \bigoplus_{d=1}^{\infty} S_d$ ist ein homogenes Ideal in S.
Zur Erinnerung: Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset S$ heißt *homogen*, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird, wenn also $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathfrak{a}_d$ gilt, wobei $\mathfrak{a}_d := \mathfrak{a} \cap S_d$ die Untergruppe der homogenen Elemente vom Grad d in $\mathfrak{a}$ ist.
Wir definieren die Menge $\operatorname{Proj} S$ als die Menge aller homogenen Primideale $\mathfrak{p} \subset S$, die S_+ nicht enthalten:

$$\operatorname{Proj} S = \{\mathfrak{p} \subset S \mid \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Ist $\mathfrak{a} \subset S$ ein homogenes Ideal, so definieren wir die projektive Nullstellenmenge $\mathbb{V}(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Proj} S$ als die Menge

$$\mathbb{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}.$$

2.12 Lemma: (a) $\mathbb{V}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathbb{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathbb{V}(\mathfrak{b})$,

(b) $\mathbb{V}(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} \mathbb{V}(\mathfrak{a}_i)$.

□

2.13 Definition: Sei S ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj} S$. Die abgeschlossenen Mengen in X sind die Mengen $\mathbb{V}(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a} \subset S$ homogenes Ideal ist. Die Strukturgarbe $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X$ wird folgendermaßen eingeführt.
Zunächst erinnern wir an die Lokalisierung $S_{(\mathfrak{p})}$ von S in einem homogenen Primideal $\mathfrak{p} \subset S$. Dazu betrachtet man das multiplikative System T aller homogenen Elemente in $S \backslash \mathfrak{p}$. Der Ring $T^{-1}S = \{\frac{a}{b} \mid a \in S, b \in T\}$ ist dann $\mathbb{Z}$-graduiert. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} (T^{-1}S)_n &= \left\{\tfrac{a}{b} \mid a \in S_{d+n}, b \in T, \operatorname{grad} b = d\right\}. \\ (T^{-1}S)_0 &= \left\{\tfrac{a}{b} \mid a \in S, b \in T, a \text{ homogen}, \ \operatorname{grad} a = \operatorname{grad} b\right\} \end{aligned}$$

ist ein Unterring von $T^{-1}S$ und wird mit $S_{(\mathfrak{p})}$ bezeichnet (nicht zu verwechseln mit der Lokalisierung $S_{\mathfrak{p}}$). $S_{(\mathfrak{p})}$ ist lokaler Ring mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}(S_{(\mathfrak{p})}) = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathfrak{p}, b \notin \mathfrak{p}, a \text{ homogen}, \ \operatorname{grad} a = \operatorname{grad} b\right\}$$

(Es gibt hier keinen kanonischen Homomorphismus $S \to S_{(\mathfrak{p})}$ wie im affinen Fall.) Sei $U \subset X$ offen. Der Ring $\mathscr{O}(U)$ wird (analog zum affinen Fall) definiert als der Unterring von $\prod\limits_{\mathfrak{p}\in U} S(\mathfrak{p})$, der aus allen Familien

$$s = (s(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p}\in U}$$

von Elementen $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ besteht, die folgende (lokale) Bedingung erfüllen.

($*$) Zu jedem Punkt $\mathfrak{p} \in U$ gibt eine offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und homogene Elemente $a, f \in S$ vom selben Grad, so dass $f \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in V$ und

$$s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \text{ in } S_{(\mathfrak{q})}$$

für alle $\mathfrak{q} \in V$.

Offensichtlich ist $\mathscr{O}$ eine Garbe von Ringen auf X.

$\operatorname{Proj} S$ ist der geringte Raum mit dem topologischen Raum X und der Strukturgarbe $\mathscr{O}$.

2.14 Satz: (a) $\forall \mathfrak{p} \in X : \mathscr{O}_{\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$.

$(X, \mathscr{O})$ ist also ein lokal geringter Raum.

(b) Für ein homogenes Element $f \in S_+$ bezeichne $D_+(f) = X \backslash \mathbb{V}(f)$ die offene Menge aller $\mathfrak{p} \in X$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Die Mengen $D_+(f)$ bilden eine offene Überdeckung von X und es gibt $(D_+(f), \mathscr{O} \mid D_+(f))$ ist als lokal geringter Raum isomorph zum Spektrum des Rings $S_{(f)}$, wobei

$$S_{(f)} := (S_f)_0 = \left\{ \frac{a}{f^k} \mid k \geq 0, a \in S_{Kd} \right\}$$

($d = \operatorname{grad} f$).

(c) $\operatorname{Proj} S$ ist ein Schema.

Beweis: Zu (a): Dies beweist man genauso wie im affinen Fall (vgl. Satz 2.4(a)).

Zu (b): Es gilt

$$X = \bigcup_{\substack{f\in S_+\\ \text{homogen}}} D_+(f),$$

denn ist $\mathfrak{p} \in X$, so ergibt es ein homogenes Element $f \in S_+$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Wir konstruieren nun ‘auf natürliche Weise’ einen Isomorphismus lokal geringter Räume

$$(\psi_f, \theta_f) : D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}.$$

Wir beginnen mit der Abbildung

$$\psi_f : D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}.$$

Es sei $\mathfrak{p} \subset S$ ein homogenes Primideal mit $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist

$$\mathfrak{p}S_f = \{\frac{a}{f^k} \mid a \in \mathfrak{p}, k \geq 0\}$$

ein Primideal in S_f (siehe: Atiyah/Macdonald, Introduction to commutative algebra, proposition 3.11) und somit ist

$$\psi_f(\mathfrak{p}) := \mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}$$

ein Primideal in $S_{(f)}$. Damit haben wir die (mengentheoretische) Abbildung

$$\psi_f : D_+(f) \to \operatorname{Spec} S_{(f)}.$$

Wir beweisen: Ist $h \in S_{kd}$ ($d = \operatorname{grad} f$), also $\frac{h}{f^k} \in S_{(f)}$, so gilt

$$\psi_f^{-1}\left(D\left(\frac{h}{f^k}\right)\right) = D_+(hf). \tag{$*$}$$

Beweis "$\subset$": Es sei $\mathfrak{p} \in \psi_f^{-1}\left(D\left(\frac{h}{f^k}\right)\right)$, also $\frac{h}{f^k} \notin \psi_f(\mathfrak{p})$. Dann ist $h \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D_+(hf)$.

"$\supset$": Es sei $\mathfrak{p} \in D_+(hf)$. Dann ist $f \notin \mathfrak{p}$ und $h \notin \mathfrak{p}$. Es folgt $\psi_f(\mathfrak{p}) = \varphi(\psi_{hf}(\mathfrak{p}))$, denn es gilt

$$\psi_f \mid D_+(hf) = \varphi \circ \psi_{hf}, \tag{$**$}$$

wobei $\varphi : \operatorname{Spec} S_{(hf)} \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$ der von dem kanonischen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S_{(f)} & \longrightarrow & S_{(hf)}, \\ & \dfrac{a}{f^m} & \longmapsto & \dfrac{h^m a}{(hf)^m}, \end{array}$$

induzierte Morphismus der Spektren ist.

Zu $(**)$: $\psi_{hf}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}S_{hf} \cap S_{(hf)}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\psi_{hf}(\mathfrak{p}) &= \Phi^{-1}(\mathfrak{p}S_{hf} \cap S_{(hf)} = \\ &= \left\{\frac{a}{f^m} \mid a \in S_{md}, \frac{h^m a}{(hf)^m} \in \mathfrak{p}S_{hf}\right\} \\ &= \left\{\frac{a}{f^m} \mid a \in S_{md} \cap \mathfrak{p}\right\} = \psi_f(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Die Abbildung φ hat das Bild $D(\frac{h}{f^k})$, wie man sofort sieht. Also ist

$$\psi_f(\mathfrak{p}) \in D\left(\frac{h}{f^k}\right)$$

und $(*)$ ist bewiesen.

Aus $(*)$ folgt die Stetigkeit, denn die offenen Mengen $D\left(\frac{h}{f^k}\right)$, $h \in S_{kd}$, $k > 0$, bilden eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec} S_{(f)}$.

Aus $(*)$ folgt auch die Injektivität von ψ_f: Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in D_+(f)$, $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Dann ist etwa $\mathfrak{p}_1 \not\subset \mathfrak{p}_2$. Folglich gibt es ein $h \in \mathfrak{p}_1$ mit $h \notin \mathfrak{p}_2$.

Dann ist $D_+(hf)$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}_2$, die $\mathfrak{p}_1$ nicht enthält.

Es folgt $\psi_f(\mathfrak{p}_2) \in \psi_f(D_+(hf)) = D(\frac{h}{f^k})$ und $\psi_f(\mathfrak{p}_1)$ gehört aber wegen $(*)$ nicht zu $D(\frac{h}{f^k})$, weil ja $\mathfrak{p}_1 \notin D_+(hf)$. Somit ist $\psi_f(\mathfrak{p}_1) \neq \psi_f(\mathfrak{p}_2)$. Das zeigt die Injektivität von ψ_f.

Wir zeigen, dass ψ_f auch surjektiv ist:

Es sei $\mathfrak{q} \subset S_{(f)}$ ein Primideal und für $n > 0$ sei

$$\mathfrak{p}_n := \left\{ x \in S_n \mid \frac{x^d}{f^n} \in \mathfrak{q} \right\}.$$

Sind $\frac{x^d}{f^n}, \frac{y^d}{f^n} \in \mathfrak{p}_n$, so folgt

$$\frac{(x+y)^{2d}}{f^{2n}} = \sum_{j=0}^{2d} \binom{2d}{j} \frac{x^j y^{2d-j}}{f^{2n}} \in \mathfrak{q},$$

weil alle Summanden in $\mathfrak{q}$ sind, denn $\mathfrak{q}$ ist ja ein Ideal und jeder Summand hat $\frac{x^d}{f^n}$ oder $\frac{y^d}{f^n}$ als Faktor.

Da $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist, folgt $\frac{(x+y)^d}{f^n} \in \mathfrak{q}$. Damit ist $x+y \in \mathfrak{p}_n$ und wir haben gezeigt, dass $\mathfrak{p}_n$ eine additive Untergruppe von S_n ist. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{p} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n \subset S$ ein homogenes Primideal ist, genügt es, die folgenden Eigenschaften zu verifizieren:

(i) $S_m \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}_{n+m}$ für alle $n > 0$, $m \geq 0$.

(ii) Ist $h \in S_m$, $g \in S_n$ und $hg \in \mathfrak{p}_{n+m}$, so gilt $h \in \mathfrak{p}_n$ oder $g \in \mathfrak{m}$.

(iii) $\mathfrak{p}_n \neq S_n$ für ein $n > 0$.

Das ist einfach:

Zu (i): Ist $g \in S_m$, $x \in \mathfrak{p}_n$, so ist $\frac{g^d}{f^m} \in S_{(f)}$ und somit $\dfrac{g^d}{f^m} \cdot \dfrac{x^d}{f^n} \in \mathfrak{q}$. also $gx \in \mathfrak{p}_{n+m}$.

Zu (ii): Es sei $\frac{(hg)^d}{f^{n+m}} \in \mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $S_{(f)}$ ist, folgt $\frac{h^d}{f^m} \in \mathfrak{q}$ oder $\frac{g^d}{f^n} \in \mathfrak{q}$, d.h. $h \in \mathfrak{p}_n$ oder $g \in \mathfrak{p}_n$.

Zu (iii): Wäre $\mathfrak{p}_n = S_n$ für alle $n > 0$, so wäre $\mathfrak{p} = S_+$. Insbesondere wäre $f \in \mathfrak{p}_d$, also $1 = \frac{f^d}{f^d} \in \mathfrak{q}$. Das ist natürlich nicht der Fall.

Damit ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal in S mit $f \notin \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$.

Nach Konstruktion ist

$$\psi_f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass ψ_f bijektiv ist und wegen $(*)$ gilt auch: ψ_f ist topologisch.

Kommen wir nun zum Homomorphismus

$$\theta_f : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}} \to (\psi_f)_* \mathscr{O}_{D_+(f)}.$$

Wir brauchen nur die Abbildung in den Halmen zu betrachten: Es sei $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ und $\mathfrak{q} = \psi_f(\mathfrak{p})$. Es gibt dann einen natürlichen Isomorphismus

$$\theta_{f,\mathfrak{p}} : \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)},q} & \longrightarrow & \mathscr{O}_{D_+(f),p} \\ \| & & \| \\ (S_{(f)})_{\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}} & & S_{(\mathfrak{p})} \end{array}$$

Ist $z \in (S_{(f)})_{\mathfrak{p}S_f \cap S_{(f)}}$ so gibt es Elemente $x \in S_{md}$ $y \in S_{kd}$, $k > 0$, $y \notin \mathfrak{p}$, so dass $z = \frac{x}{f^m} / \frac{y}{f^k}$. Man setze dann $\theta_{f,\mathfrak{p}}(z) := \frac{xf^k}{yf^m}$.

Man zeige dann, dass dies wohldefiniert und ein Isomorphismus ist.

Man kann jetzt für $U \subset \operatorname{Spec} S_{(f)}$ offen die Abbildung

$$\theta_{f,U} : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(p)}}(U) \to \mathscr{O}_{D_+(f)}(\psi_f^{-1}(U))$$

definieren durch

$$\theta_{f,U}((s(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{q}\in U}) = (\theta_{f,\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{p}\in\psi_f^{-1}(U)},$$

wobei $\mathfrak{q} = \psi_f(\mathfrak{p})$.

Dann ist $\theta_f : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}} \to (\psi_f)_* \mathscr{O}_{D_+(f)}$ ein Garbenisomorphismus. (b) ist bewiesen.

Zu (c): $\operatorname{Proj} S$ wird von den affinen Schemata $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogen, überdeckt, ist also ein Schema. $\square$

2.15 Beispiel: Es sein A ein Ring und $x_0,\dots,x_n$ seien Unbestimmte. Es sei $S = A[x_0,\dots,x_n]$ der Polynomenring mit der Graduierung $\operatorname{grad} a = 0$ für $a \in A$, $\operatorname{grad} x_i = 1$ für $i = 0,\dots,n$.

$$\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj} A[x_0,\dots,x_n]$$

heißt der *n-dimensionale projektive Raum über A.*

Man nennt n auch die *relative Dimension* von $\mathbb{P}^n_A$ über A.

Die Inklusion $A \subset A[x_0,\dots,x_n]$ induziert eine Abbildung

$$\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A,$$

$\pi(\mathfrak{p}) := \mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p} \cap A$. π ist ein Morphismus von Schemata, welcher durch die kanonische Abbildung

$$\varphi : A = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_A}(\mathbb{P}^n_A)$$

mit $\varphi(a) := (\frac{a}{1})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}^n_A}$ induziert wird.

Allgemein gilt:

2.16 Lemma: Es sei X ein Schema und A ein Ring. $f : X \to \operatorname{Spec} A$ sei ein Morphismus von Schemata. Zu f gehört insbesondere der Homomorphismus $\theta_A : A \to \mathscr{O}_X(X)$.

Diese Zuordnung $f \mapsto \theta_A$ ist ein Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{S}ch}(X, \operatorname{Spec} A) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}ings}(A, \mathscr{O}_X(X))$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Injektivität der Abbildung

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{S}ch}(X, \operatorname{Spec} A) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}ings}(A, \mathscr{O}_X(X)).$$

Es sei zur Abkürzung $Y = \operatorname{Spec} A$.

Es gilt dann also für alle $g \in A$

$$A_g = \mathscr{O}_Y(D(g)).$$

Es sei nun ein Morphismus

$$(f, \theta) : X \to Y$$

gegeben, $\theta : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ induziert den Homomorphismus

$$\varphi : A \to \mathscr{O}_X(X).$$

Wir wollen zeigen, dass (f,θ) durch φ festgelegt ist, die Zuordnung $(f,\theta)\mapsto\varphi$ also injektiv ist: Für $x\in X$, $\mathfrak{p}=f(x)$ haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{CD} A=\mathscr{O}_Y(Y) @>{\varphi=\theta_Y}>> \mathscr{O}_X(X) \\ @V{\rho_\mathfrak{p}}VV @VV{\rho_x}V \\ A_\mathfrak{p} @>>{\theta_x}> \mathscr{O}_{X,x} \end{CD} \tag{$*$}$$

Da θ_x nach Definition der Morphismen lokal geringter Räume lokal ist, ist

$$\theta_x^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$$

und somit ist

$$(\rho_x\circ\varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})=(\theta_x\circ\rho_\mathfrak{p})^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})=\rho_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})=\mathfrak{p}=f(x)$$

nur von φ und x abhängig.

$$f(x)=\varphi^{-1}(\rho_x^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}).$$

Die stetige Abbildung $f:X\to Y$ ist also vollständig durch $\varphi:A\to\mathscr{O}_X(X)$ bestimmt.
Aus dem kommutativen Diagramm $(*)$ folgt auch, dass alle Halmabbildungen θ_x durch φ festgelegt sind. Es gilt für $a\in A$, $\mathfrak{q}\in A\backslash\mathfrak{p}$:

$$\theta_x\left(\frac{a}{g}\right)=\rho_x(\varphi(a))/\rho_x(\varphi(g)).$$

Damit sind auch die Homomorphismen θ_V, $V\subset Y$ offen, durch φ festgelegt.
Die Injektivität der Abbildung

$$(f,\theta)\mapsto\varphi$$

ist damit bewiesen.
Wir kommen zur Surjektivität:
Gegeben sei ein Ringhomomorphismus

$$\varphi:A\to\mathscr{O}_X(X).$$

Es sei $X=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ eine offene Überdeckung aus affinen Schemata. Die Homomorphismen

$$\varphi_i=\rho_{X,U_i}\circ\varphi:A\to\mathscr{O}_X(U_i)$$

korrespondieren nach 2.6 zu Morphismen

$$f_i : U_i \to \operatorname{Spec} A.$$

Die Ringhomomorphismen φ_{ij} zu $f_i \mid U_i \cap U_j$ und φ_{ji} zu $f_j \mid U_i \cap U_j$ stimmen überein, weil

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_{ij} & = & \rho_{U_i, U_i \cap U_j} \circ \varphi_i & = & \rho_{X, U_i \cap U_j} \circ \varphi = \\ & & \rho_{U_j, U_i \cap U_j} \circ \varphi_j & = & \varphi_{ji}. \end{array}$$

Nach dem ersten Teil unseres Beweises müssen daher $f_i \mid U_i \cap U_j$ und $f_j \mid U_i \cap U_j$ als Morphismen lokal geringter Räume

$$U_i \cap U_j \to \operatorname{Spec} A$$

übereinstimmen. Damit gibt es einen Morphismus $f : X \to \operatorname{Spec} A$ mit

$$f \mid U_i = f_i \text{ für alle } i \in I.$$

Nach Konstruktion gilt für die induzierte Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : A \to \mathscr{O}_X(X)$$

$$\varphi_i = \rho_{X, U_i} \circ \widetilde{\varphi} \text{ für alle } i \in I.$$

Es gilt also

$$\rho_{X, U_i} \circ \varphi = \rho_{X, U_i} \circ \widetilde{\varphi} \text{ für alle } i \in I.$$

Daraus folgt $\varphi = \widetilde{\varphi}$ (Übung).

Der Satz ist vollständig bewiesen. □

2.17 Definition: Es sei S ein Schema.

Ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $\pi : X \to S$ heißt *S-Schema*. π heißt die *Strukturabbildung*. Ist $S = \operatorname{Spec} A$, A ein Ring, so heißt ein S-Schema auch ein *A-Schema*.

Die Strukturabbildung $\pi : X \to \operatorname{Spec} A$ entspricht dann einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathscr{O}_X(X)$, dem *Strukturhomomorphismus*. Man kann also auch sagen: Ein Schema X ist ein A-Schema, wenn $\mathscr{O}_X(X)$ eine A-Algebra ist. Alle Schnittringe $\mathscr{O}_X(U)$, $U \subset X$ offen, und alle Halme $\mathscr{O}_{X,x}$ sind dann A-Algebren.

Sind $\pi : X \to S$ und $\pi' : Y \to S$ zwei S-Schemata, so heißt ein Morphismus $f : X \to Y$ ein S-Morphismus, wenn $\pi' \circ f = \pi$ gilt. Mit $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller S-Morphismen von X und Y. Wir erhalten so die Kategorie

$$\mathscr{S}ch(S)$$

aller S-Schemata mit den S-Morphismen als Morphismen. Ist $S = \operatorname{Spec} A$, so schreiben wir

$$\mathscr{S}ch(A) := \mathscr{S}ch(S).$$

Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra, so ist

$$X = \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} K$$

ein affines K-Schemata. Es sei $A = K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$. Die Menge der abgeschlossenen Punkte in X entspricht nach dem Hilbertschen Nullstellensatz genau den Nullstellen

$$a \in K^n \text{ des Ideals } \mathfrak{a} \subset K[x_1, \dots, x_n].$$

An Stelle des Nullstellengebildes von $\mathfrak{a}$ in K^n betrachten wir jetzt das affine Schema

$$X = \operatorname{Spec} A.$$

Neben den abgeschlossenen Punkten, d.h. den maximalen Idealen, gibt es viele weitere Punkte in X, die klassisch genau den sämtlichen abgeschlossenen irreduziblen algebraischen Teilmengen $Y \subset K^n$ entsprechen.

Zur Vertiefung und Illustration der Grundbegriffe folgen einige Übungsaufgaben:

2.18 Übung: (a) Es sei X ein Schema. Dann gibt es genau einen Morphismus $f : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Man kann also sagen: X ist ein $\mathbb{Z}$-Schema.

(b) Es sei R ein Ring. Ein *R-wertiger Punkt* in X ist nach Definition ein Morphismus

$$f : \operatorname{Spec} R \to X.$$

Mit $X^\bullet(R) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} R, X)$ bezeichnen wir die Menge aller R-wertigen Punkte in X. Man erhält so eine kovarianten Funktor

$$X^\bullet : \mathscr{R}ings \to \mathscr{S}ets.$$

Ein Schema X kann somit auch als kovarianter Funktor $X^\bullet : \mathscr{R}ings \to \mathscr{S}ets$ aufgefasst werden, aber nicht jeder kovariante Funktor $F : \mathscr{R}ings \to \mathscr{S}ets$ als Schema.

Es gilt: Sind X, Y Schemata und ist $\varphi : X^\bullet \to Y^\bullet$ eine natürliche Transformation von Funktoren, so gibt es genau einen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata, so dass für alle Ringe R die Abbildung

$$\varphi_R : X^\bullet(R) \to Y^\bullet(R)$$

durch f induziert ist, d.h.

$$\varphi_R(\alpha) = f \circ \alpha \text{ für alle } \alpha \in X^\bullet(R).$$

2.19 Übung: Es sei X ein Schema und $x \in X$ ein Punkt. K ein Körper und $R = K[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, sei der Ring der Dualzahlen über K.

Wir untersuchen die Menge der R-wertigen Punkte in X.

Es sei $\alpha : \operatorname{Spec} R \to X$ ein Morphismus.

Da $\operatorname{Spec} R = \{p\}$ mit $p = (\varepsilon)$, ist die stetige Abbildung α durch seinen Wert $\alpha(p)$ bestimmt. Es sei $\alpha(p) = x$.

Der zugehörige Garbenhomomorphismus

$$\theta : \mathcal{O}_X \to \alpha_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$$

ist dann wie folgt zu beschreiben:

Ist $U \subset X$ offen mit $x \notin U$, so ist $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$, also θ_U die Nullabbildung $\mathcal{O}_X(U) \to 0$ auf den Nullring. Sei also $x \in U$.

Dann ist $\operatorname{Spec} R = \alpha^{-1}(U)$ und somit ist θ_U ein Ringhomomorphismus

$$\theta_U : \mathcal{O}_X(U) \to R = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R).$$

Alles ist durch die lokale Halmabbildung

$$\theta_x : \mathcal{O}_{X,x} \to R$$

beschrieben. Insbesondere muss der Restklassenkörper $k(x)$ sich in den Körper K einbetten lassen. Ist $f \in \mathfrak{m}_{X,x}^2$, so ist $\theta_x(f) = 0$, denn für $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_{X,x}$ ist

$$\theta_x(f_1 f_2) = \theta_x(f_1)\theta_x(f_2) \in \mathfrak{m}(R)^2 = (\varepsilon^2) = 0.$$

Dann faktorisiert θ_x über $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 & \xrightarrow{\widetilde{\theta}} & R \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & k(x) & \hookrightarrow & R/(\varepsilon) = K \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
\end{array}$$

$\theta = \widetilde{\theta} \circ \pi$. Nehmen wir nun an, dass X ein K-Schema ist und $\alpha : \operatorname{Spec} R \to X$ ein K-Morphismus. Dann ist $K(x) \to K$ die Identität. Der Bildpunkt x hat also den Restklassenkörper K.

(Ist X ein Schema, so ist

$$X_K^\bullet(K) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Spec}\, K, X) = \{x \in X \mid K = k(x)\}.)$$

Man erhält dann das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen ($\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{X,x}$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, "t"] & \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\theta}"] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varepsilon"] & R \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $t(f \mod \mathfrak{m}^2)\varepsilon = \widetilde{\theta}(f \mod \mathfrak{m}^2) = \theta_x(f)$ für $f \in \mathfrak{m}$. Wie man sieht ist θ_x und damit $\alpha : \mathrm{Spec}\, R \to X$ mit $\alpha(p) = x$ vollständig durch die Linearform

$$t \in \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K)$$

bestimmt. Der Vektorraum

$$T_{X,x} := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K),$$

also der Dualraum von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ heißt der *Zariski-Tangentialraum* von X im Punkt x mit $K = k(x)$. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist der Cotangentialraum von X im Punkt x.

Elemente aus $T_{X,x}$ heißen *Tangentialvektoren* in x. Ist $x \in X$ ein Punkt mit $k(x) = K$, so entspricht ein Tangentialvektor $t \in T_{X,x}$ einer Fortsetzung von $x : \mathrm{Spec}\, K \to K$ zu einem K-Morphismus

$$x_1 : \mathrm{Spec}\, K[\varepsilon] \to X.$$

Es seien X, Y K-Schemata und $f : X \to Y$ sei ein K-Morphismus. Ist $x \in X$ ein K-wertiger Punkt, d.h. $K = k(x)$, so ist auch $y = f(x)$ ein K-wertiger Punkt, wie man an dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
k(f(x)) \arrow[rr] & & k(x) \\
& K \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sieht. Schränkt man die Abbildung

$$f_* : X(K[\varepsilon]) \to Y(K[\varepsilon])$$

auf $T_{X,x} = \{\alpha : \mathrm{Spec}\, K[\varepsilon] \to X \mid \alpha \mid \mathrm{Spec}\, K = x\}$ ein, so erhält man eine K-lineare Abbildung

$$f_* : T_{X,x} \to T_{Y,f(x)}.$$

f_* kann man als die *Ableitung* von f im Punkt x ansehen.

2.20 Übung: (a) Ein Ring R heißt reduziert, wenn R außer 0 keine nilpotenten Elemente besitzt: $\mathfrak{n}(R) = 0$. Ein Schema $(X, \mathscr{O}_X)$ heißt reduziert, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(1) $\forall U \subset X$ offen: $\mathscr{O}_X(U)$ ist reduziert,

(2) $\forall x \in X$: $\mathscr{O}_{X,x}$ ist reduziert.

(b) Für einen Ring R heißt $R_{red} = R/\mathfrak{n}(R)$ die Reduktion von R. Ist S ein reduzierter Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\mathfrak{n}(R) \subset \ker\varphi$ und es wird ein Homomorphismus $R_{red} \to S$ induziert.

Es sei X ein Schema. $\mathscr{S}ch_{red}$ sei die Kategorie der reduzierten Schemata. Der Funktor

$$\begin{aligned} F: \qquad \mathscr{S}ch_{red} &\longrightarrow \mathscr{S}ets \\ Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch}(Y,X) \end{aligned}$$

ist darstellbar, d.h. es gibt ein reduziertes Schema Z zusammen mit einem Morphismus $g : Z \to X$, so dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch_{red}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch}(Y,X)$$

mit $k \mapsto g \circ k$ bijektiv ist.

Z heißt die *Reduktion* von X und $g : Z \to X$ heißt die Reduktionsabbildung. Man konstruiert Z als

$$X_{red} = (X, (\mathscr{O}_X)_{red}),$$

wobei $(\mathscr{O}_X)_{red}(U) := \mathscr{O}_X(U)_{red}$.

$g : X_{red} \to X$ ist die Identität auf den zugrunde liegenden topologischen Räumen und $\theta : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X_{red}}$ ist die Restklassenabbildung

$$\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(U)/\mathfrak{n}(\mathscr{O}_X(U)).$$

2.21 Übung: Sei X ein topologischer Raum und $Z \subset X$ abgeschlossen und irreduzibl, $\zeta \in X$. ζ heißt *generischer Punkt* von Z, wenn $\zeta \in Z$ und $Z = \overline{\{\zeta\}}$ die abgeschlossene Hülle von $\{\zeta\}$ in X ist.

Sei X ein Schema. Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ besitzt einen generischen Punkt und dieser ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Es sei $U \subset X$ offen und affin, so dass

$$Z' = U \cap X \neq \emptyset.$$

Dann ist Z' abgeschlossen in U.

Z' ist auch irreduzibel in U. Das sieht man so: Zunächst ist $B = Z \backslash U$ abgeschlossen in Z mit $B \neq Z$. Weiter ist $A := \overline{Z'}$, die abgeschlossene Hülle von Z', natürlich abgeschlossen in Z, und es gibt $Z = A \cup B$. Da $B \neq Z$, muss damit $A = Z$ gelten. Z' ist *dicht* in Z. Es sei nun $Z' = Z_1 \cup Z_2$ abgeschlossen. Es folgt $Z = \overline{Z'} = \overline{Z_1} \cup \overline{Z_2}$ und somit $\overline{Z}_i = Z$ für ein i, also $Z_i = Z'$ für ein i. Z' ist also irreduzibel.

Es sei $U = \operatorname{Spec} A$, $Z' = V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal mit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Da Z' irreduzibel ist, ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal in A und $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A$ ist der generische Punkt von Z' in U. Sei $\zeta \in U$ der Punkt zum Primideal $\mathfrak{a}$. Dann ist die abgeschlossene Hülle von $\{\zeta\}$ in U die Menge Z' und in X somit Z:

$$\overline{Z} = \overline{\{\zeta\}}.$$

Damit ist die Existenz eines generischen Punktes gezeigt.

Es seien nun $\zeta_1, \zeta_2 \in X$ mit

$$\overline{\{\zeta_1\}} = \overline{\{\zeta_2\}}.$$

Es sei U offene affine Umgebung von ζ_1. Dann gilt $\zeta_2 \in U$, weil sonst $\overline{\{\zeta_2\}} \subset X \backslash U$, also $\zeta_1 \notin \overline{\{\zeta_2\}}$ wäre. Damit können wir ohne Einschränkung X als affin annehmen. Der einzige generische Punkt einer irreduziblen Teilmenge

$$V(\mathfrak{p}) \subset \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal},$$

ist aber $\mathfrak{p}$! $\square$

2.22 Übung: Es seien S, T graduierte Ringe. $\varphi : S \to T$ sei ein Ringhomomorphismus vom Grad Null, d.h. $\varphi(S_n) \subset T_n$ für alle $n \geq 0$.

Es sei

$$U = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T \mid \mathfrak{p} \not\supset \varphi(S_+)\}$$

das Komplement der abgeschlossenen Menge $\mathbb{V}(S_+ T)$. φ induziert einen Morphismus

$$f : U \to \operatorname{Proj} S$$

mit zugrunde liegender stetiger Abbildung

$$f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

und für $g \in S_+$ homogen ist

$$\theta_{D_+(g)} : \mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(g)) \to \mathscr{O}_U(f^{-1}(D_+(g)))$$

der von φ induzierte Homomorphismus

$$S_{(g)} \to T_{(\varphi(g))}.$$

Dabei beachte man:

$$\mathfrak{p} \in f^{-1}(D_+(g)) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in D_+(g) \iff g \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \iff \varphi(g) \notin \mathfrak{p}.$$

Also ist $f^{-1}(D_+(g)) = D_+(\varphi(g)) \subset U$ und

$$\mathscr{O}_U(f^{-1}(D_+(g))) = T_{(\varphi(g))}.$$

Als einfaches konkretes Beispiel betrachten wir die von der Inklusion

$$\varphi : K[x_0, \ldots, x_{n-1}] \to K[x_0, \ldots, x_n]$$

erzeugte Projektion (K Körper)

$$\pi : \mathbb{P}_K^n \setminus \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \to \mathbb{P}_K^{n-1}$$
$$\pi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap K[x_0, \ldots, x_{n-1}].$$

Die Primideale $\mathfrak{p} \supset (x_0, \ldots, x_{n-1})$ würden $\pi(\mathfrak{p}) \cap (x_0, \ldots, x_{n-1}) = S_+$ liefern und nicht zu $\operatorname{Proj} S$ gehören.
Die homogenen Primideale

$$\mathfrak{p} \subset K[x_0, \ldots, x_n] \text{ mit } (x_0, \ldots, x_{n-1}) \subset \mathfrak{p} \text{ und } (x_0, \ldots, x_n) \not\subset \mathfrak{p}$$

entsprechen den homogenen Primidealen

$$\overline{\mathfrak{p}} \subset K[x_n] \text{ mit } x_n \notin \overline{\mathfrak{p}}.$$

Jedes homogene Primideal in $K[x_n]$, das x_n nicht enthält, ist aber das Nullideal. Damit ist, wie nicht anders erwartet,

$$\mathbb{V}((x_0, \ldots, x_{n-1})) = \{(x_0, \ldots, x_{n-1})\}$$

ein einziger (abgeschlossener) Punkt in $\mathbb{P}_K^n$.
Dieser Punkt heißt *Projektionszentrum* von π.

3 Eigenschaften von Schemata, Produkte

Wir nennen ein Schema X (a) *zusammenhängend*, (b) *irreduzibel*, wenn der zugrunde liegende topologische Raum es ist.

X heißt *integer*, wenn X irreduzibel und reduziert ist, das heißt, wenn alle Ringe $\mathscr{O}_X(U)$ Integritätsbereiche sind.

3.1 Definition: Ein Schema X heißt *lokal noethersch* wenn X eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ besitzt, so dass U_i das Spektrum eines noetherschen Rings A_i ist. X heißt noethersch, wenn X lokal noethersch und quasikompakt ist.

3.2 Satz: Sei X ein Schema.

X ist genau dann lokal noethersch, wenn gilt: Jede offene affine Teilmenge von X ist das Spektrum eines noetherschen Rings.

Beweis: "$\Leftarrow$" ist trivial.

"$\Rightarrow$": Es sei $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ und U_i affine offene Menge. Ist nun $U \subset X$ offen und affin, so ist $U \cap U_i = \bigcup\limits_{j} U_{ij}$ die Vereinigung von offenen Mengen der Form $D(g_{ij}) \subset U_i$, wobei $g_{ij} \in A_i = \mathscr{O}_X(U_i)$. Da A_i noethersch, sind auch die Lokalisierungen $(A_i)_{g_{ij}}$ noethersch und somit ist $U = \bigcup\limits_{i,j} U_{ij}$ die Vereinigung offener affiner Mengen U_{ij} mit noetherschen Ring $\mathscr{O}(U_{ij})$.

Damit haben wir die Aufgabe auf den Fall reduziert, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist und $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, wobei $A_i = \mathscr{O}(U_i)$ noethersch ist.

Ist $g \in A$ mit $D(g) \subset U_i$, so ist $g_i := g \mid U_i \in A_i$ und es gibt einen Isomorphismus $A_g \to (A_i)_{g_i}$. Damit ist A_g auch noethersch. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass

$$A_i = A_{g_i} \text{ mit } g_i \in A$$

und dass A_i noethersch ist.

Da $\operatorname{Spec} A$ quasikompakt ist, können wir I als endlich annehmen, etwa

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n, \quad U_i \cong \operatorname{Spec} A_{g_i}.$$

Aus der Garbeneigenschaft von $\mathscr{O}_X$ folgt

$$A = \mathscr{O}_X(X) = \ker\left(\prod_{i=1}^{n} A_{g_i} \xrightarrow{\rho} \prod_{(i,j)} A_{(g_i g_j)}\right),$$

wobei $\rho((s_i)_i) = (\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) - \rho_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j))_{(i,j)}$. Es gilt also $A \subset \prod_{i=1}^n A_{g_i}$ ist ein Unterring des noetherschen Rings $\widetilde{A} := \prod_{i=1}^n A_{g_i}$.

Wir zeigen: Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gilt

$$(\mathfrak{a}\widetilde{A}) \cap A = \mathfrak{a}. \tag{$*$}$$

Beweis: Es sei $a \in A$ und $a \in \mathfrak{a} \cdot \widetilde{A}$, also existieren $a_i \in \mathfrak{a}$, $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$a = \frac{a_i}{g_i^m}$$

in A_{g_i} für $i = 1, \ldots, n$.

Wir wollen einsehen, dass $a \in \mathfrak{a}$.

Wegen $a = \frac{a^i}{g_i^m}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$g_i^{k+m} a = g_i^k a_i$$

für $i = 1, \ldots, n$. Wir wählen eine Teilung der Eins

$$1 = c_1 g_1^{k+m} + \ldots + c_n g_n^{k+m}$$

mit $c_i \in A$. Dann folgt

$$a = \sum c_i g_i^{k+m} a = \sum c_i g_i^k a_i \in \mathfrak{a}.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen.

Da $\widetilde{A}$ noethersch ist, folgt jetzt leicht, dass auch A noethersch ist. $\square$

Wir merken uns: In einem lokal noetherschen Schema sind alle offenen affinen Unterschemata noethersch. Ein affines Schema ist genau dann lokal noethersch, wenn der Ring der globalen Schnitte der Strukturgarbe noethersch ist.

Wichtige Endlichkeitsbedingungen für Morphismen sind

“lokal von endlichen Typ”
“endlich”

Es sei P eine Eigenschaft für Ringhomomorphismen, d.h. für Morphismen affiner Schemata.

Ist nun $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, so sagt man: f hat lokal die Eigenschaft P, wenn es eine affine offene Überdeckung $(V_i)_i$ von Y und eine offene $(U_{ij})_j$ von $f^{-1}(V_i)$ gibt, so dass

$$f \mid U_{ij} : U_{ij} \to V_i$$

die Eigenschaft P besitzt.

3.3 Definition: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata

(a) f heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene affine Überdeckung $(V_i)_i$ von Y gibt, $V_i = \operatorname{Spec} B_i$, und für jedes i eine offene Überdeckung $(U_{ij})_j$ von $f^{-1}(V_i)$, $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$, so dass A_{ij} eine endlich erzeugte B_i-Algebra ist (bezüglich der durch $f \mid U_{ij} : U_{ij} \to V_i$ definierten Algebrastruktur).

(b) f heißt von *endlichem Typ*, wenn in (a) für jedes i die Überdeckung $(U_{ij})_j$ endlich gewählt werden kann.

(c) f heißt *affin*, wenn es eine offene Überdeckung $(V_i)_i$ von Y gibt, so dass $f^{-1}(V_i)$ affin ist für alle $i \in I$.

(d) f heißt *endlich*, wenn es eine offene affine Überdeckung $(V_i)_i$ von Y gibt, so dass für alle i $f^{-1}(V_i)$ affin ist und $\mathscr{O}(f^{-1}(V_i))$ endlich über $\mathscr{O}(V_i)$ ist.

3.4 Definition: Es sei X ein Schema.

Ein Schema Y zusammen mit einem Morphismus $i : Y \to X$ heißt *abgeschlossenes Unterschema* von X, wenn der Y zugrunde liegende topologische Raum ein abgeschlossener Unterraum von X ist, also $Y \subset X$ abgeschlossene Teilmenge von X mit der Relativtopologie ist und $i : Y \to X$ die Inklusionsabbildung ist. Weiter wird gefordert, dass der Garbenhomomorphismus

$$\mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$$

surjektiv ist, also $i_*\mathscr{O}_Y \cong \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$ gilt, wobei $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$ die Idealgarbe $\ker(\mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y)$ ist. $f : Y \to X$ heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn die stetige Abbildung $f : Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung des topologischen Raums Y in X ist und wenn $\mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y$ surjektiv ist.

3.5 Beispiel: (a) $\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ ist Morphismus von endlichem Typ. Man sagt $\mathbb{P}^n_A$ ist A-Schema von endlichem Typ.

(b) Ist A Ring, $q = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in A[x]$, so ist $B = A[x]/(q)$ endlich über A (sogar freier A-Modul vom Rang n über A). Die von $A \to B$ induzierte Abbildung

$$\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

ist endlich.

Die von $A[x] \to B$ induzierte Abbildung

$$\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A[x]$$

ist eine abgeschlossene Einbettung.

Wir kommen zu einer sehr wichtigen Konstruktion dem *Faserprodukt* $X \times_S Y$ zweier S-Schemata $X \to S$, $Y \to S$.

Das Faserprodukt ist durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert. Das Problem ist der Nachweis der Existenz von Faserprodukten!

3.6 Definition: Es seien X, Y zwei S-Morphismen. Der Funktor $F : \mathscr{S}ch(S) \to \mathscr{S}ets$ wird wie folgt definiert:

$$F(Z) := \mathrm{Hom}_S(Z, X) \times \mathrm{Hom}_S(Z, Y)$$

Ist $h : Z \to Z'$ ein S-Morphismus, so ist

$$h^* : F(Z') \to F(Z)$$

die Abbildung $h^*(f, g) = (f \circ h, g \circ h)$.

Man sagt: Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert in $\mathscr{S}ch(S)$, wenn der Funktor F darstellbar ist, wenn es also ein S-Schema

$$X \times_S Y$$

zusammen mit einem universellen Element

$$(p, q) \in F(X \times_S Y)$$

gibt, so dass

$$\mathrm{Hom}_S(Z, X \times_S Y) \to F(Z),\ h \mapsto h^*(p, q)$$

für alle S-Schemata Z eine Bijektion ist. Ausführlich heißt das:

Für jedes Paar $(f : Z \to X, g : Z \to Y)$ von Morphismen von Schemata mit der Eigenschaft $\pi_X \circ f = \pi_Y \circ g$, wobei $\pi_X : X \to S$, $\pi_Y : Y \to S$ die Strukturmorphismen von X und Y sind. Gibt es genau einen Morphismus $h : Z \to X \times_S Y$, so dass $p \circ h = f$, $g \circ h = g$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \arrow[ddl, "f"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
 & X \times_S Y \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\
X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Bevor wir den allgemeinen Existenzbeweis antreten, betrachten wir einige Spezialfälle.

Zunächst untersuchen wir den Fall, dass

$$X = \operatorname{Spec} A, \quad Y = \operatorname{Spec} B, \quad S = \operatorname{Spec} R$$

und $\varphi : R \to A$, $\psi : R \to B$ Ringhomomorphismen sind mit $\varphi^* = \pi_X$, $\psi^* = \pi_Y$. Nach Lemma 2.16 ist das obige Diagramm äquivalent zum

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{O}(Z) & \\
 & \mathscr{O}(X \times_S Y) \arrow[u, dashed, "?"'] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "i"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "j"] \\
 & R \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

In der Kategorie der Ringe kann man bekanntlich (siehe Atiyah-Macdonald) das Tensorprodukt

$$A \otimes_R B$$

zusammen mit Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{rcl} i : A & \to & A \otimes_R B \\ j : B & \to & A \otimes_R B \end{array}$$

mit $i \circ \varphi = j \circ \psi$ konstruieren, so dass für jeden Ring C und alle Ringhomomorphismen

$$\alpha : A \to C, \ \beta : B \to C \ \text{ mit } \alpha \circ \varphi = \beta \circ \varphi$$

genau ein Ringhomomorphismus

$$\gamma : A \otimes_R B \to C$$

existiert mit

$$\gamma \circ i = \alpha, \ \gamma \circ i = \beta.$$

Wenn wir dann

$$X \times_S Y := \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$$

setzen, so ist die universelle Eigenschaft wegen der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts und wegen Lemma 2.16 erfüllt.

Folgende Notationen sind üblich: $i(a) = a \otimes 1$, $j(b) = 1 \otimes b$. In $A \otimes_R B$ bezeichnet $a \otimes b$ das Element $(a \otimes 1)(1 \otimes b) = i(a)j(b)$, wobei $a \in A$, $b \in B$. Jedes Element in $A \otimes_R B$ ist eine Summe

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i,$$

wobei $a_i \in A$, $b_i \in B$.
Es gelten die Regeln:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \to & A \otimes_R B \\ (a,b) & \to & a \otimes b \end{array}$$

ist R-bilinear, also zum Beispiel

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ (ra) \otimes b &= a \otimes rb = r(a \otimes b) \end{aligned}$$

für $a_1, a_2, a \in A$, $b \in B$, $r \in R$.
Als R-Modul ist $A \otimes_R B$ durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:
Ist $\varphi : A \times B \to M$ eine R-bilineare Abbildung in den R-Modul M, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : A \otimes_R B \to M \text{ mit } \widetilde{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a,b).$$

3.7 Beispiel: Ist A eine R-Algebra und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so ist

$$A \otimes_R (R/\mathfrak{a}) = A/\mathfrak{a}A,$$

wobei $\mathfrak{a}A \subset A$ das von $\mathfrak{a}$ erzeugte Ideal in A ist. Das beweist man so:

$$i : A \to A/\mathfrak{a}A \text{ sei die Restklassenabbildung}$$

und $j : R/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a}A$ sei die von dem Strukturhomomorphismus

$$\varphi : R \to A$$

induzierte Abbildung.
Ist nun B ein Ring mit Ringhomomorphismen $\alpha : A \to B$, $\beta : R/\mathfrak{a}A \to B$, so dass

$$\alpha \circ \varphi = \beta \circ \pi,$$

wobei $\pi : R \to R/\mathfrak{a}$ die Restklassenabbildung ist, so gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$$\gamma : A/\mathfrak{a}A \to B$$

mit $\gamma \circ i = \alpha$, $\gamma \circ j = \beta$.
Man setzt einfach $\gamma(a \bmod \mathfrak{a}A) := \alpha(a)$ und zeigt, dass dies wohldefiniert ist.
Es sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal und $k = R/m$ der Restklassenkörper. Dann ist

$$A \otimes_R k = A/\mathfrak{m}A$$

$A/\mathfrak{m}A$ ist in natürlicher Weise eine k-Algebra. Man erhält folgendes kommutative Diagramm von Schemata

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}A) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & \operatorname{Spec} A \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r, "x"'] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

wobei x der k-wertige Punkt in $\operatorname{Spec} R$ ist, der durch $\mathfrak{m}$ definiert wird.

g ist eine abgeschlossene Einbettung und $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$ heißt die *Faser* von f über x (im schematheoretischen Sinn).

Diese Definition berücksichtigt, ob die Abbildung f über dem Punkt, regulär ist oder nicht, d.h. die Strukturgarbe der Faser wird im allgemeinen nicht reduziert sein. Am besten ist, wir schauen uns einen einfachen endlichen Morphismus an: K sei ein Körper, $\operatorname{char} K \neq 2$.

$$\begin{aligned}
&R = K[t],\ A = K[x] \\
&\varphi : R \to A \text{ sei der durch} \\
&t \mapsto x^2 \text{ induzierte } K\text{-Algebrahomomorphismus.}
\end{aligned}$$

$f : \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} A \to S = \operatorname{Spec} R$ sei der induzierte Morphismus.

Wir untersuchen die Faser von f über den Punkten $x_0 : \operatorname{Spec} K \to S$ zu $\mathfrak{m}_0 = (t)$ und $x_1 : \operatorname{Spec} K \to S$ zu $\mathfrak{m}_1 = (t-1)$. Die Faser über x_0 ist

$$X_0 = \operatorname{Spec} A = A/\mathfrak{m}_0 A = \operatorname{Spec}(K[x]/(x^2)) = \operatorname{Spec} K[\varepsilon] \text{ wobei } \varepsilon^2 = 0,$$

und die Faser über x_1 ist

$$\begin{aligned}
X_1 = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}_1 A &= \operatorname{Spec}(K[x]/(x^2-1) \\
&= \operatorname{Spec}(K[x]/(x-1) \times K[x]/(x+1)).
\end{aligned}$$

X_0 ist ein ‘Doppelpunkt’,

X_1 besteht aus zwei einfachen Punkten.

Um noch den Bezug zur klassischen Situation zu beleuchten sei K algebraisch abgeschlossen. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, mapsto] & K \arrow[r, hook, "a \mapsto (x-a)"'] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A \arrow[d, "f"] \\
a^2 & K \arrow[r, hook, "b \mapsto (t-b)"'] & \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd} \qquad \text{kommutativ,}$$

$$\begin{aligned}
\text{denn}\quad f((x-a)) &= \varphi^{-1}((x-a)) \\
&= \{p \in K[t] \mid \varphi(p) \in (x-a)\}
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(p) = p(x^2) \in (x-a) \iff a$ ist Nullstelle von $q(x) := p(x^2) \iff q(a) = 0 \iff p(a^2) = 0 \iff p \in (t-a^2)$.

Es handelt sich hier also um die klassische reguläre Abbildung $K \to K$, $a \mapsto a^2$, die über 0 verzweigt ist und über $K \backslash 0$ eine 2-blättrige Überlagerung ist.

Übrigens: f bildet den generischen Punkt von $\operatorname{Spec} A$ auf den generischen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ ab. Die resultierende Körpererweiterung

$$K(t) \subset K(x)$$

ist endlich vom Grad 2,

$$K(x) = K(t)[y]/(y^2 - t) = K(t) \oplus K(t)x,$$

wobei $x := y \bmod (y^2 - t)$, also $x^2 = t$ in $K(x)$.

3.8 Theorem: Das Faserprodukt $X \times_X Y$ zweier S-Schemata X, Y existiert.

Beweis: Der Beweis erfolgt in mehreren Etappen.

1. Schritt: Wir haben schon gezeigt, dass für affine Schemata $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert. Es gilt

$$X \times_X Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B).$$

Tensorprodukte haben wir hier als bekannt vorausgesetzt. In Beispielen werden wir aber näher damit vertraut werden.

2. Schritt: Wir erklären das Verkleben von Morphismen. Es seien X, Y Schemata und $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ sei eine offene Überdeckung. Dann gilt offensichtlich

$$\Phi : \operatorname{Hom}(X, Y) \to \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(U_i, Y)$$

mit $\Phi(f) = (f \mid U_i)_{i \in I}$ ist der *Differenzkern* von

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(U_i, Y) \underset{\Phi_2}{\overset{\Phi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} \operatorname{Hom}(U_i \cap U_j, Y)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_1((f_i)_{i \in I}) &= (f_i \mid U_i \cap U_j)_{(i,j) \in I \times I}, \\ \Phi_2((f_i)_{i \in I}) &= (f_j \mid U_i \cap U_j)_{(i,j) \in I \times I}, \end{aligned}$$

d.h. Φ ist injektiv und es gilt $\Phi_1 \circ \Phi = \Phi_2 \circ \Phi$ und für $\alpha \in \prod\limits_{i \in I} \operatorname{Hom}(U_i, Y)$ mit

$$\Phi_1(\alpha) = \Phi_2(\alpha)$$

gibt es ein $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ mit

$$\Phi(f) = \alpha.$$

3. Schritt: $X \times_S Y$ existiere, $U \subset X$ sei offen. Dann existiert $U \times_S Y$ und ist gleich $p^{-1}(U)$, wobei $p : X \times_S Y \to X$ die Projektion auf X ist.
Wir beweisen die universelle Eigenschaft für

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'=q|p^{-1}(U)"] & \\ U & & Y \end{tikzcd}.$$

Es sei Z S-Schema und $f : Z \to U$, $g : Z \to Y$ seien S-Morphismen.
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten S-Morphismen $h : Z \to X \times_S Y$ mit

$$p \circ h = i \circ f \text{ und } q \circ h = g,$$

wobei $i : U \to X$ die Inklusion ist.
Es folgt $p(h(Z)) = f(Z) \subset U$, also ist

$$h(Z) \subset p^{-1}(U)$$

d.h. h kann als Morphismus $h : Z \to p^{-1}(U)$ aufgefasst werden. Es gilt dann

$$p' \circ h = f \text{ und } q' \circ h = g$$

und hierdurch ist h auch eindeutig bestimmt.
4. Schritt: Es sei $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_I$ eine offene Überdeckung von X.
Behauptung: Existiert $U_i \times_S Y$ für alle $i \in I$, so existiert auch $X \times_S Y$.
Beweis: Nach dem 3. Schritt existieren die Faserprodukte

$$(U_i \cap U_j) \times_X Y$$

und wir haben offene Einbettungen

$$\begin{tikzcd} & U_i \times_S Y \\ (U_i \cap U_j) \times_S Y \arrow[ur, "f_{ij}"] \arrow[dr, "f_{ji}"'] & \\ & U_j \times_S Y \end{tikzcd}$$

Es sei $U_{ij} \subset U_I \times_S Y$ die Bildmenge von f_{ij}. Die beiden Abbildungen $f_{ij} : (U_i \cap U_j) \times_S Y \to U_{ij}$, $f_{ji} : (U_i \cap U_j) \times_S Y \to U_{ij}$ induzieren dann einen Isomorphismus

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}.$$

Wir zeigen, dass die φ_{ij} Verklebungsdaten für die $U_i \times_S Y$ sind.
Dazu müssen wir nur überlegen, dass

$$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} \text{ auf } U_{ij} \cap U_{ik}. \tag{$*$}$$

Wir bemerken zunächst: Ist $V \subset U \subset X$ offen, so induzieren die Inklusion $i : V \to U$ und die Identität $id : Y \to Y$ den eindeutig bestimmten Morphismus

$$f = i \times_S id : V \times_S Y \to U \times_S Y$$

mit der Eigenschaft $q \circ f = q'$, $p \circ f = i \circ p'$, wobei p, q die zu $U \times_S Y$ und p', q' die zu $V \times_S Y$ gehörenden Projektionen sind.
Insbesondere ist

$$f_{ij} = \alpha \times_S id_Y, \text{ wobei } \alpha : U_i \cap U_j \to U_i$$

die Inklusionsabbildung ist.
Aus dem kommutativen Diagramm von Inklusionen

$$\begin{tikzcd}
 & U_i \cap U_j \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & U_i \\
U_i \cap U_j \cap U_k \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & U_I \cap U_k \arrow[ur] \arrow[dr] & U_j \\
 & U_j \cap U_k \arrow[r] \arrow[ur] & U_k
\end{tikzcd}$$

erhalten wir durch Bilden des Faserprodukts mit Y über S wieder ein kommutatives Diagramm ($i \mapsto i \times_S id_Y$ ist ja funktoriell).
Daraus ergibt sich dann wegen

$$\varphi_{ij} \circ f_{ij} = f_{ji}$$

die Beziehung

$$\varphi_{ik} \mid U_{ij} \cap U_{ik} = (\varphi_{jk} \mid U_{ik} \cap U_{ji}) \circ (\varphi_{ij} \mid U_{ij} \cap U_{ik}).$$

Jetzt erhält man durch Verkleben der $U_i \times_S Y$ ein Schema W mit offenen Einbettungen $U_i \times_S Y \hookrightarrow W$.

Die Morphismen

$$\begin{tikzcd} & U_i \times_S Y \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\ X \supset U_i & & Y \end{tikzcd}$$

können zu Morphismen

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

verklebt werden. Offensichtlich ist dann (W, p, q) ein Faserprodukt von X und Y über S.

5. Schritt: Aus dem ersten und vierten Schritt folgt jetzt:

$$X \times_S Y \text{ existiert, falls } Y \text{ und } S \text{ affin sind.}$$

Ist nun nur S affin, so kann man Y als Vereinigung offener affiner Schemata V_i schreiben. Dann existiert $X \times_S V_i$ und nach dem vierten Schritt (die Reihenfolge der Faktoren ist ja unbedeutend) existiert somit $X \times_S Y$, falls S affin ist.

6. Schritt: Sei nun auch S ein beliebiges Schema. Wir wählen eine offene affine Überdeckung $S = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$ von S und betrachten die offenen Mengen

$$X_i = \pi_X^{-1}(S_i), \quad Y_i = \pi_Y^{-1}(S_i),$$

wobei $\pi_X : X \to S$, $\pi_Y : Y \to S$ die Strukturmorphismen sind.

Dann existiert $X_i \times_{S_i} Y_i$

mit den Projektionen $p_i : X_i \times_{S_i} Y_i \to X_i$, $q_i : X_i \times_{S_i} Y_i \to Y_i$.

Mit $\widetilde{q_i} = \mathrm{inkl} \circ q_i$, wobei $\mathrm{inkl} : Y_i \hookrightarrow Y$ die Inklusionsabbildung ist, gilt offensichtlich

$$(X_i \times_{S_i} Y_i, p_i, \widetilde{q_i}) = X_i \times_S Y.$$

Dann existiert $X_i \times_S Y$ und nach dem vierten Schritt existiert somit $X \times_S Y$. Der Beweis ist beendet. $\square$

3.9 Definition: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $y \in Y$ ein Punkt. $k(y)$ sei der Restklassenkörper von y und $\operatorname{Spec} k(y) \to X$ sei der $k(y)$-wertige Punkt, den y bestimmt. Das $k(y)$-Schema

$$X_y := X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$$

heißt die *(schematheoretische) Faser* von f über y.

Man nennt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

cartesisch, wenn $X' = X \times_S S'$ gilt.

Man sagt dann das S'-Schema X' ist durch den *Basiswechsel* $S' \to S$ aus dem S-Schema X entstanden.

Ist speziell $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} R'$ und R' eine R-Algebra via $\varphi : R \to R'$, so schreibt man

$$X' = X \times_R R' = X_{R'}$$

Ist $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, $U_i \cong \operatorname{Spec} A_i$, so wird X' durch Verkleben der Spektren $\operatorname{Spec}(A_i \otimes_R R')$ konstruiert.

3.10 Übung: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. $y \in Y$ ein Punkt. Weiter sei

$$f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$$

mit der Relativtopologie versehen. Dann gilt:

Das cartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k(y) \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

induziert einen Homöomorphismus von X_y auf den topologischen Raum $f^{-1}(y)$.

Beweis: Offensichtlich kann man ohne Einschränkung Y als affin annehmen, denn jeder Punkt eines Schemas besitzt eine offene affine Umgebung. Es sei $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ eine affine offene Überdeckung von X. Dann wird X_y durch Verkleben der $\operatorname{Spec} k(y) \times_y U_i$ konstruiert und zwar so, dass es offensichtlich ausreicht, den Satz für den Fall, dass X affin ist, zu beweisen.

Es liegt dann folgende Situation vor:

$Y = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $f : X \to Y$ ist von einem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to A$ induziert. $y \in Y$ gehört zu einem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

Der Restklassenkörper $k(\mathfrak{p})$ ist der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ und wegen $R \to R/\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p})$ gilt kanonisch

$$A \otimes_R k(\mathfrak{p}) = A \otimes_R R/\mathfrak{p} \otimes_{R/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}A \otimes_{R/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}).$$

Die Quadrate in folgendem kommutativen Diagramm sind cartesisch.

$$\begin{tikzcd}
X_y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R k(\mathfrak{p})) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}A) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}\, A = X \arrow[d, "f=\varphi^*"] \\
\mathrm{Spec}\, k(\mathfrak{p}) \arrow[r, "y"'] & \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}\, R = Y
\end{tikzcd}$$

y ist der generische Punkt des Unterschemas $V(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$, entspricht also dem Nullideal in $R/\mathfrak{p}$. Indem wir Y durch $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass Y integer ist und y der generische Punkt von Y ist. y entspricht dem Nullideal in R. $K = k(y)$ ist der Quotientenkörper von R.

Wir betrachten die Fälle: 'φ ist injektiv' und 'φ ist nicht injektiv' getrennt.

Sei zunächst $\varphi : R \to A$ nicht injektiv. Dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \neq (0)$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A$, d.h. $y = (0) \notin f(\mathrm{Spec}\, A)$, also $f^{-1}(y) = \emptyset$. Es gilt aber auch $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K) = \emptyset$.

Es gilt ja $K = S^{-1}R$. wobei S das multiplikative System $R \backslash 0$ ist. Dann ist $\varphi(S)$ ein multiplikatives System in A und nach den Regeln der Tensorrechnung (siehe Atiyah-Macdonald) gilt

$$A \otimes_R K = A \otimes_R S^{-1}R = \varphi(S)^{-1}A = 0,$$

denn da φ nicht injektiv ist, ist $0 \in \varphi(S)$, und somit sind alle Brüche in $\varphi(S)^{-1}A$ gleich Null. Es gilt also $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K) = \emptyset = f^{-1}(y)$. Es sei jetzt $\varphi : R \to A$ injektiv. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $R \subset A$ ein Unterring. Es gilt jetzt $A \otimes_R K = S^{-1}A$.

$$i : A \to A \otimes_R K, \quad j : K \to A \otimes_R K$$

seien die natürlichen Homomorphismen

$$i(a) = \frac{a}{1}, \quad j\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{q} \cap R = 0\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{q} \cap S = \emptyset \end{aligned}$$

und folglich ist $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}(\mathfrak{q})$ eine Bijektion von $f^{-1}(y)$ auf

$$\mathrm{Spec}(S^{-1}A) = \mathrm{Spec}(A \otimes_R K).$$

Wegen $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ ist diese Abbildung die Umkehrabbildung zu

$$i^* : \mathrm{Spec}(A \otimes_R K) \to f^{-1}(y) \subset \mathrm{Spec}\, A.$$

Diese Abbildung ist auch topologisch, denn ist $\mathfrak{b} \subset A \otimes_R K$ ein Ideal und $\widetilde{\mathfrak{q}} \in V(\mathfrak{b})$, also $\widetilde{\mathfrak{q}} \supset \mathfrak{b}$, so gilt auch $\widetilde{\mathfrak{q}} \cap A \supset \mathfrak{b} \cap A$ und ist umgekehrt $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b} \cap A$, so gilt, wenn auch noch $\mathfrak{q} \in f^{-1}(y)$, also $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$,

$$S^{-1}\mathfrak{q} \supset S^{-1}(\mathfrak{b} \cap A) = \mathfrak{b}.$$

Damit gilt

$$f^{-1}(y) \cap V(\mathfrak{b} \cap A) \xrightarrow{\cong} V(\mathfrak{b})$$

unter der Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}(\mathfrak{q})$. Folglich ist die Abbildung

$$i^* : \operatorname{Spec}(A \otimes_R K) \to f^{-1}(y)$$

topologisch. $\square$

3.11 Übung: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

(a) Ist f affin, so gilt für jede offene affine Menge $V \subset Y$:

$$f^{-1}(V) \text{ ist affin.}$$

(b) Ist f endlich, so gilt für jede offene affine Menge $V \subset Y$

$$\mathscr{O}_X(f^{-1}(V)) \text{ ist endlich als } \mathscr{O}_Y(V)\text{-Modul.}$$

Beweis: zu (a): Nach Voraussetzung gibt es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ von Y, so dass auch $f^{-1}(V_i)$ affin ist.

Ist nun $V \subset Y$ offen und affin, $B = \mathscr{O}_Y(V)$, so gibt es Elemente $f_1, \ldots, f_n \in B$, so dass

$$V = W_1 \cup \ldots \cup W_n,$$

wobei $W_i = D(f_i) \subset V$ die zu $\operatorname{Spec}(B_{f_i})$ isomorphe offene affine Menge ist, und so dass eine Abbildung $\tau : \{1, \ldots, n\} \to I$ existiert mit $W_i \subset V_{\tau(i)}$.

Es folgt dann $f^{-1}(W_i) \cong W_i \times_{V_{\tau(i)}} f^{-1}(V_{\tau(i)})$. Da W_i, V_j, $f^{-1}(V_j)$ sämtlich affin sind, ist auch

$$U_i := f^{-1}(W_i)$$

affin. Damit habe wir eine affine offene Überdeckung

$$U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

von $U := f^{-1}(V)$.

Es sei $g_i = \theta_V(f_i) \in \mathscr{O}_X(U)$. Dann ist nach Konstruktion

$$U_i = \{x \in U \mid g_i(x) \neq 0\}.$$

Die Identität $id : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(U)$ induziert einen Morphismus

$$h : U \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(U).$$

$D(g_i) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(U)_{g_i}$ ist offen in $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(U)$ und es gilt offensichtlich

$$h^{-1}(D(g_i)) = U_i.$$

Damit ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{h_i} & \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(U)_{g_i} = D(g_i) \\ \cap & & \cap \\ U & \xrightarrow[h]{} & \operatorname{Spec} \mathscr{O}_X(U) \end{array}$$

cartesisch. Da nach Voraussetzung

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i),$$

ist das von $f_1 \ldots, f_n$ erzeugte Ideal das Einheitsideal und somit ist auch das von $g_1, \ldots, g_n$ erzeugte Ideal das Einheitsideal. Folglich gilt für

$$A = \mathscr{O}_X(U)$$

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i).$$

Wenn wir noch zeigen, dass

$$h_i : U_i \to \operatorname{Spec} A_{g_i} = D(g_i)$$

für alle i ein Isomorphismus ist, so ist auch $h : U \to \operatorname{Spec} A$ ein Isomorphismus, U also affin.
Da U_i affin ist, ist h_i genau dann ein Isomorphismus, wenn die von der Restriktion

$$\rho : \mathscr{O}_X(U) = A \to \mathscr{O}(U_i)$$

induzierte Abbildung

$$\widetilde{\rho} : A_{g_i} \to \mathscr{O}(U_i)$$

ein Isomorphismus ist. Das wollen wir zeigen.

(i) $\widetilde{\rho}$ ist injektiv:

i sei dabei beliebig aber fest gewählt. Es sei $s \in A$ mit $s \mid U_i = 0$. Wir schränken $g_i \in A$ auf alle offenen Mengen U_j ein. Da U_j affin ist, ergibt sich

$$U_i \cap U_j = D(g_i \mid U_j) \subset U_j.$$

Nach Voraussetzung ist $s \mid U_i \cap U_j = 0$ für alle j und somit existiert ein $N > 0$, so dass

$$(g_i \mid U_j)^N (s \mid U_j) = 0$$

in $\mathscr{O}(U_j)$ für alle j. Da $\mathscr{O}$ eine Garbe ist und U von den U_j überdeckt wird, ist

$$g_i^N s = 0.$$

Damit ist $s = 0$ in A_{g_i}. Die Injektivität von $\widetilde{\rho}$ ist bewiesen.

(ii) $\widetilde{\rho}$ ist surjektiv:

Es sei $s \in \mathscr{O}(U_i)$. Wir benutzen jetzt, dass $\mathscr{O}(U_i \cap U_j) = \mathscr{O}(U_j)_{g_i|U_i}$, denn es gilt $U_i \cap U_j = D(g_i \mid U_j)$ in dem affinen Schema U_j. Also gibt es ein $N > 0$ und Elemente $\widetilde{s}_j \in \mathscr{O}(U_j)$, so dass

$$\widetilde{s}_j \mid U_i \cap U_j = (g_i \mid U_i \cap U_j)^N s \mid U_i \cap U_j$$

Es folgt für alle j, k:

$$\widetilde{s}_j \mid U_i \cap U_j \cap U_k = \widetilde{s}_k \mid U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Da $U_j \cap U_k$ affin ist und $U_i \cap U_j \cap U_k = D(g_i \mid U_j \cap U_k)$, ist $\mathscr{O}(U_i \cap U_j \cap U_k) = \mathscr{O}(U_j \cap U_k)_{g_i|U_j \cap U_k}$, und es gibt ein $M > 0$, so dass

$$((g_i^M \mid U_j)\widetilde{s}_j \mid U_j \cap U_k = ((g_i^M \mid U_k)\widetilde{s}_k \mid U_j \cap U_k.$$

Da $\mathscr{O}$ eine Garbe ist, gibt es einen Schnitt $\widetilde{s} \in \mathscr{O}(U)$ mit

$$\widetilde{s} \mid U_j = (g_i^M \mid U_j)\widetilde{s}_j$$

für alle j. Es folgt

$$\widetilde{s} \mid U_i \cap U_j = (g_i \mid U_i \cap U_j)^{N+M} s \mid U_i \cap U_j$$

für alle j und somit ist

$$\widetilde{s} \mid U_i = (g_i \mid U_i)^{N+M} s.$$

Damit ist
$$s = \widetilde{\rho}\left(\frac{\widetilde{s}}{g_i^{N+M}}\right).$$
Die Surjektivität von $\widetilde{\rho}$ ist bewiesen.

Teil (a) der Übung ist gelöst. $\square$

zu (b) $f : X \to Y$ sei endlich.

Wir bemerken zunächst:

Ist A eine endliche B-Algebra und ist $B \to B'$ ein Ringhomomorphismus, so ist $A \otimes_B B'$ eine endliche B'-Algebra. Genauer: Ist $x_1, \dots, x_m \in A$ ein B-Modulerzeugendensystem von A, so ist $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$ ein B'-Modulerzeugendensystem von $A \otimes_B B'$.

Nach Voraussetzung gibt es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ von Y, so dass $f^{-1}(V_i)$ affin ist und $\mathscr{O}(f^{-1}(V_i))$ endliche $\mathscr{O}(V_i)$-Algebra ist für alle i.

Verfeinert man die Überdeckung V_i irgendwie, also $Y = \bigcup\limits_{j \in J} W_j$ und $\tau : J \to I$ mit $W_j \subset V_{\tau(j)}$ und sind die W_j affin offen, so ist nach der Bemerkung auch $f^{-1}(W_j)$ affin und $\mathscr{O}(f^{-1}(W_j))$ endliche $\mathscr{O}(W_j)$-Algebra. Deshalb können wir folgendes erreichen: Ist $V \subset Y$ offen und affin, so gibt es eine endliche offene affine Überdeckung von W der Gestalt $V = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n)$ mit $f_i \in B = \mathscr{O}_Y(V)$, so dass
$$A_i := \mathscr{O}_X(f^{-1}(D(f_i)))$$
endlich über B_{f_i} ist. Es gilt (wie in (a) gezeigt)
$$A_i = A_{f_i} := A \otimes_B B_{f_i},$$
wobei $A = \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$.

Wir wählen nun $x_{i1}, \dots, x_{im_i} \in A$ und $N > 0$, so dass
$$\left(\frac{x_{i1}}{f_i^N}, \dots, \frac{x_{im_i}}{f_i^N}\right)$$
ein B_{f_i}-Modulerzeugendensystem von A_i ist.

Behauptung:
$$x_{11}, \dots, x_{1m_1}, x_{21}, \dots, x_{2m_2}, \dots, x_{nm_n}$$
erzeugen A als B-Modul.

Beweis: Es sei $x \in A$. Dann existiert ein $M > 0$, so dass
$$f_i^M x = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} x_{ij}$$

für alle i und geeignete $b_{ij} \in B$.
Da $f_1^M, \dots, f_n^M$ das Einheitsideal in B erzeugen, gibt es eine “Teilung der Eins”.

$$1 = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i^M$$

mit $b_i \in B$ und somit folgt

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i^M x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} b_i b_{ij} x_{ij}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Übungsteil (b) ist gelöst.

3.12 Übung: Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *quasiendlich*, wenn gilt

$$\forall y \in Y : f^{-1}(y) \text{ ist eine endliche Menge.}$$

Nach Übung 3.10 ist dies äquivalent zu der Aussage

$$\forall y \in Y : X \times_Y k(y) \text{ ist eine endliche Menge.}$$

(a) Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist f quasiendlich.

(b) Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist das Bild $f(M)$ jeder abgeschlossenen Menge M in X wieder abgeschlossen in Y. Man sagt: f ist abgeschlossen.

zu (a): Ohne Einschränkung sei Y affin. Da f endlich ist, ist nach 3.11 auch X affin. Es sei $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $\varphi : B \to A$, der zu $f : X \to Y$ gehörende Ringhomomorphismus. φ ist endlich, A also endlich als B-Modul. Es seien etwa $f_1, \dots, f_n \in A$ ein B-Modulerzeugendensystem. Ist K ein Körper und $\alpha : B \to K$ ein Ringhomomorphismus (wenn $y \in Y$, setze man $K = k(y)$ und $\alpha : B \to K$ als die kanonische von y induzierte ‘Auswertungsabbildung’), so ist $f \otimes 1, \dots, f_n \otimes 1 \in A \otimes_B K$ ein Erzeugendensystem von $A \otimes_B K$ als K-Vektorraum.

$A \otimes_B K$ ist also ein Artin-Ring (siehe: Atiyah/Macdonald, Chap.8) und hat somit nur endlich viele Primideale, welche alle maximal sind.

Damit ist $\operatorname{Spec}(A \otimes_B K) = X \times_Y K$ endlich. Man kann noch mehr sagen: $A \otimes_B K$ ist isomorph zu einem endlichen Produkt

$$A_1 \times \dots \times A_m$$

von Artinschen lokalen K-Algebren, wobei hier natürlich die Restklassenkörper $A_i/\mathfrak{m}_i$ von A_i endliche Erweiterungskörper von K sind. (siehe: Struktursatz für Artin-Ringe). Es folgt dann

$$m = \#\operatorname{Spec}(A \otimes_B K) \le \sum_{i=1}^{m} \dim_K A_i = \dim_K (A \otimes_B K) \le n.$$

n ist also eine obere Schranke für die Anzahl der Elemente in der Faser $f^{-1}(y)$ über einen beliebigen Punkt $y \in Y$.

Zu (b): Es sei $V \subset Y$ offen und affin. Da f endlich ist, ist dann $f^{-1}(V)$ auch affin und für eine abgeschlossene Menge $M \subset X$ gilt $M_V := M \cap f^{-1}(V)$ ist abgeschlossen in $f^{-1}(V)$ und

$$f(M_V) = f(M) \cap V. \tag{$*$}$$

Um zu sehen, dass $f(M)$ abgeschlossen in Y ist, genügt es zu zeigen, dass

$$f(M) \cap V$$

in V abgeschlossen ist für alle offenen affinen Teilmengen $V \subset Y$. Wegen $(*)$ genügt es also die Aufgabe für den Fall, dass $Y = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} A$ affin sind, zu lösen. Die zugehörige Abbildung $\varphi : B \to A$ ist nach Voraussetzung endlich.

Es sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Zu zeigen ist, dass

$$f(V(\mathfrak{a})) = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in X, \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}\}$$

abgeschlossen in Y ist. Offensichtlich ist

$$f(V(\mathfrak{a})) \subset V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})).$$

Wir brauchen nur noch die umgekehrte Inklusion $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}) \subset f(V(\mathfrak{a}))$ zu zeigen. Es sei $\mathfrak{p} \in V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$. Nach Atiyah/Macdonald, Theorem 5.10 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset A$ mit

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}.$$

Man beachte dazu, dass

$$B/\varphi^{-1}(\mathfrak{a}) \hookrightarrow A/\mathfrak{a}$$

eine endliche und damit insbesondere ganze Ringerweiterung ist.

$$f(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$$

ist also abgeschlossen in Y.

$\square$

Da eine quasiendliche Abbildung natürlich nicht notwendig abgeschlossen ist, ist sie im allgemeinen auch nicht endlich.

3.13 Übung: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, Y sei irreduzibel, $\eta \in Y$ sei der generische Punkt von Y.

f heißt *generisch endlich*, wenn $f^{-1}(\eta)$ eine endliche Menge ist.

f heißt *dominant*, wenn die Bildmenge $f(X)$ dicht in Y liegt, wenn also Y die abgeschlossene Hülle von $f(X)$ ist.

Man zeige: Es seien X,Y integer, $f: X \to Y$ sei Morphismus von endlichem Typ. Ist f generisch endlich und dominant, so gibt es eine nicht-leere offene Menge $U \subset Y$, so dass der induzierte Morphismus

$$f^{-1}(U) \to U$$

endlich ist.

Beweis: Es sei $\omega \in X$ der generische Punkt von X. Wir zeigen:

1. $f(\omega) = \eta$.

Das folgt sofort aus $\overline{\{\eta\}} = Y = \overline{f(X)} = \overline{\{f(\omega)\}}$, denn $X = \overline{\{\omega\}}$ und da f dominant ist, ist $\overline{f(X)} = Y$. Der Morphismus f induziert also eine Körpererweiterung

$$K(Y) = \mathcal{O}_{Y,\eta} = \mathcal{O}_{Y,f(\omega)} \xrightarrow{\theta_\omega} \mathcal{O}_{X,\omega} = K(X).$$

Wir zeigen:

2. $K(Y) \subset K(X)$ ist endliche Erweiterung.

Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(\eta)$ endlich. Wir wählen eine offene affine Umgebung $W = \operatorname{Spec} A$ von ω in X. Dann ist auch $f^{-1}(\eta) \cap W$ endlich und nicht-leer. Wir wählen W noch so, dass W durch f in eine offene affine Umgebung $V = \operatorname{Spec} B$ von η abgebildet wird.

f induziert eine Ringhomomorphismus

$$\varphi : B \to A,$$

der wegen $f(\omega) = \eta$, d.h. $\varphi^{-1}(0) = 0$, injektiv ist. $K = K(Y)$ ist der Quotientenkörper von B und $L = K(X)$ ist der Quotientenkörper von A. Die ‘generische’ Faser

$$\operatorname{Spec}(A \otimes_B K)$$

ist endlich, weil $f^{-1}(\eta) \cap \operatorname{Spec} A$ endlich ist.

Nach Voraussetzung (f ist von endlichem Typ) können wir annehmen, dass A von endlichem Typ über B ist, d.h. endlich erzeugt als B-Algebra ist.

Damit ist auch $A \otimes_B K$ eine endliche erzeugte K-Algebra. Nach dem Satz über die Noethernormalisierung gibt es einen Polynomenring $K[x_1,\dots,x_d] \subset A \otimes_B K$, über dem $A \otimes_B K$ endlich ist. Damit erhalten wir eine surjektive (weil abgeschlossene und dominante) Abbildung

$$\operatorname{Spec}(A \otimes_B K) \to \mathbb{A}^d_K.$$

Da $\operatorname{Spec}(A \otimes_B K)$ endliche Menge ist, muss folglich $d = 0$ gelten. $A \otimes_B K$ ist also endlich über K. $A \otimes_B K$ ist Integritätsbereich, denn $A \otimes_B K = \{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B \backslash 0\} \subset L$. Als ganze Erweiterung eines Körpers ist dann $A \otimes_B K$ selbst ein Körper (Atiyah/Macdonald: proposition 5.7). Da $A \subset A \otimes_B K$ und L der Quotientenkörper von A ist, folgt

$$A \otimes_B K = L.$$

Es seien nun $x_1, \ldots, x_n \in A$ Erzeuger von A als B-Algebra. Da L endlich über K ist, sind die Element x_i algebraisch über K. Es gibt somit ein $b \in B \backslash 0$, so dass $x_1, \ldots, x_n$ ganz über B_b sind.

Es treten ja in den algebraischen Relationen der x_i über K nur endliche viele Koeffizienten in K auf. Wir wählen $b \in B \backslash 0$ als gemeinsamen Nenner dieser Koeffizienten.

Damit ist

$$A \otimes_B B_b = B_b[x_1, \ldots, x_n]$$

ganze Erweiterung von B_b und folglich endlich über B_b.

3. Es sei nun $V \subset Y$ offen und affin, $V = \operatorname{Spec} B$, so dass

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{s} W_i$$

mit offenen affinen Mengen $W_i = \operatorname{Spec} A_i$ und A_i von endlichem Typ über B.

Nach dem gerade Bewiesenen gibt es zu jedem i ein $b_i \in B$, so dass

$$A_i \otimes_B B_{b_i} \text{ endlich über } B_{b_i} \text{ ist.}$$

Setzt man $b = \prod_{i=1}^{s} b_i$, so ist

$$A_i \otimes_B B_b \text{ endlich über } B_b.$$

für alle i. Ohne Einschränkung sei $b = 1$.

Wir haben also eine offene affine Überdeckung

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{s} W_i$$

mit $W_i \to V$ endlich. Daraus folgt, dass

$$f : f^{-1}(V) \to V$$

ein *abgeschlossener* Morphismus ist.

Da die generische Faser $f^{-1}(\eta)$ nur aus einen einzigen Punkt, nämlich ω, besteht (zeige dies!), ist das Bild $f(M) \subset V$ der abgeschlossenen Menge

$$M = f^{-1}(V) \backslash W_1 \subset f^{-1}(V)$$

eine *echte* abgeschlossene Menge in V.

$$U := V \setminus f(M)$$

ist dann nicht-leere offene Menge in V und

$$f^{-1}(U) \subset W_1.$$

Damit ist

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W_1 \arrow[d, "f|W_1"] \\ U \arrow[r, hook] & V \end{tikzcd}$$

cartesisch. Da ‘endlich’ bei Basiswechsel erhalten bleibt, ist $f^{-1}(U) \to U$ endlich.
$\square$

Wir geben einige konkrete Beispiele.

3.14 Beispiel: Es sei $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]/(q)$, wobei $q \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad n sei. Dann ist

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]/(q) = A$$

injektiv und A ist freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n. Der Morphismus

$$f : X \to Y,$$

der durch $\mathbb{Z} \hookrightarrow A$ induziert wird, ist also endlich und dominant, also surjektiv, und es gilt für $p \in \mathbb{Z}$, p Primzahl: Die schematheoretische Faser von f über dem Punkt $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \hookrightarrow Y$ ist

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]/(q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(p) = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]/(\overline{q}),$$

wobei $\overline{q} \in \mathbb{F}_p[x]$ das Bild von q unter der Abbildung $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$, die die ganzzahligen Koeffizientenmodule p reduziert, ist.

Der Ring $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p[x]/(\overline{q})$ ist n-dimensional als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum und zerfällt nach dem Struktursatz für Artinringe in ein Produkt von lokalen $\mathbb{F}_p$-Algebren

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = A_1 \times \ldots \times A_m,$$

wobei $m = n$ genau dann gilt, wenn $A_i \cong \mathbb{F}_p$ für alle i. Man sagt dann: f ist *unverzweigt* über p. Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn $\overline{q} \in \mathbb{F}_p[x]$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

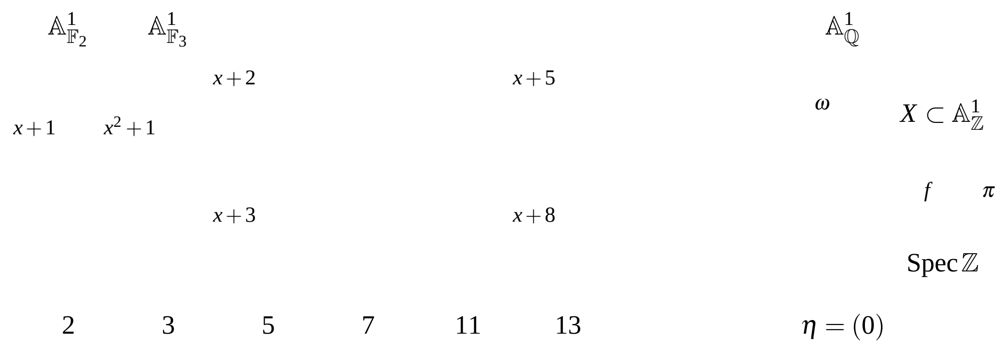
Für $q = x^2 + 1$ ist $A = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen ganzen Zahlen.

Der Morphismus
$$f : \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$
ist über $p = 2$ verzweigt, denn
$$x^2 + 1 = (x+1)^2 \text{ in } \mathbb{F}_2[x].$$
Dagegen ist f über $p = 5$ unverzweigt, denn
$$x^2 + 1 = (x+2)(x+3) \text{ in } \mathbb{F}_5[x].$$
Bekanntlich besitzt die Faser $f^{-1}(p)$ für Primzahlen $p > 2$ mit $p \equiv 1 \bmod 4$ genau zwei Elemente. Über solchen Primzahlen ist p unverzweigt.

Ist dagegen $p \equiv 3 \bmod 4$, so ist $x^2 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x]$ und somit ist
$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p[x]/(x^2+1) = \mathbb{F}_p[i]$$
eine Körpererweiterung vom Grad 2 über $\mathbb{F}_p$.

In der Zahlentheorie nennt man diese Primzahlen *p träge*. In diesem Fall besteht die Faser $f^{-1}(p)$ aus nur einem Punkt, nämlich dem Primideal
$$p\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Z}[i],$$
welches auch maximal ist. Nach dem Homomorphiesatz ist $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i] = \mathbb{F}_p[i]$.

$X = \operatorname{Spec} A$ ist ein abgeschlossenes Unterschema der *arithmetischen Ebene* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$. Die von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]$ induzierte Projektion $\pi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ hat als Fasern die affinen Geraden über den Primkörpern $\mathbb{F}_p$, p Primzahl, und $\mathbb{Q}$.



Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen ist faktoriell, also ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper. In der algebraischen Zahlentheorie untersucht man endliche Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$. Um Geometrie ins Spiel zu bringen, betrachtet man den Ring A der *ganzen* Zahlen in K, das ist die Menge aller Elemente $\alpha \in K$, die ganz über $\mathbb{Z}$ sind. Dann ist $X = \operatorname{Spec} A$ eine "glatte affine Kurve" und die Inklusion $\mathbb{Z} \subset A$ induziert einen Morphismus affiner Schemata

$$f : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z},$$

dessen generische Faser die gegebene Körpererweiterung liefert:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} A \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

ist cartesisch. (siehe: Bourbaki, Commutative Algebra, Chap V.)

Ist $n = [K : \mathbb{Q}]$, so ist A mit der Addition eine freie abelsche Gruppe vom Rang n (siehe: Bourbaki, loc. cit. V. 1.6, Proposition 18, Corollary 3). f ist endlicher Morphismus und alle Fasern von f besitzen höchstens n Punkte. Für $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, ist $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_p$.

3.15 Beispiel: Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Inklusion graduierter K-Algebren

$$K[x_0, \ldots, x_m] \subset K[x_0, \ldots, x_n]$$

induziert die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : \quad & \mathbb{P}^n_K \backslash \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m) \to \mathbb{P}^m_K, \\ & \pi(\mathfrak{q}) := \mathfrak{q} \cap K[x_0, \ldots, x_m] \end{aligned}$$

mit Zentrum $\mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m)$.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal in $K[x_0, \ldots, x_n]$ und

$$X = \operatorname{Proj}(K[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}) \to \mathbb{P}^n_K$$

das durch $\mathfrak{p}$ definierte integre abgeschlossene Unterschema von $\mathbb{P}^n_K$. Wir setzen voraus, dass

$$\mathbb{V}(\mathfrak{p}) \cap \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m) = \emptyset. \qquad (*)$$

Dann ist $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_K \backslash \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m)$ und $f = \pi \circ i$ ist ein Morphismus

$$f : X \to \mathbb{P}^m_K.$$

Gilt auch noch

$$\mathfrak{p} \cap K[x_0, \ldots, x_m] = (0), \qquad (**)$$

so ist f dominant.

π ist affin, denn für $0 \le i \le m$ ist

$$\pi^{-1}(D_+^{(m)}(x_i)) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ homogen}, x_i \notin \mathfrak{p}\} = D_+^{(n)}(x_i)$$

in $\mathbb{P}_k^n$. Da $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_K^n \setminus \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m)$ abgeschlossene Einbettung ist, ist folglich auch

$$f : X \to \mathbb{P}_K^m$$

ein affiner Morphismus.

Aus $(*)$ folgt

$$X \cap \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m) = \emptyset$$

und somit ist, wie man aus der projektiven Geometrie weiß (siehe Hartshorne, Chapter I, Theorem 7.2)

$$\dim X + \dim \mathbb{V}(x_0, \ldots, x_m) < \dim \mathbb{P}_K^n$$

d.h. $\dim X \le m$.

Da f dominant ist, folgt $\dim X = m$.

Man kann weiter zeigen, dass f ein endlicher Morphismus ist.

Es sei $X = \mathbb{V}(y^2 z - x(x+z)(x-z)) \subset \mathbb{P}_K^2$ und $f : X \to \mathbb{P}_K^1$ die Einschränkung der Projektion $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.

$X = 0$

$(0,1,0) = P_1$

$P = (1,0,0)$ $Y = 0$

$Z = 0$

X

$\mathbb{P}_K^1$

über $Q_1 = [1,0] = f(P_1)$ ist f verzweigt.

Die schematheoretische Faser ist mit den Koordinaten $s = \frac{x}{y}$, $t = \frac{z}{y}$ das Spektrum des Rings

$$K[s,t]/(t - s(s+t)(s-t)) \otimes_{K[t]} K[t]/(t),$$

welcher offensichtlich zu

$$K[s,t]/(t-s(s+t)(s-t),t) = K[s]/(s^3)$$

isomorph ist. Hierdurch kommt zum Ausdruck, dass P_1 ein Wendepunkt auf X ist und die Projektionsgerade PP_1 die Tangente von X in P_1 ist. f ist genau dann unverzweigt über einem Punkt $Q=[a,b]$, wenn die Verbindungsgerade von P und $[0,a,b]$ in $\mathbb{P}^2_K$ nirgends tangential an X ist.

3.16 Übung: Es sei X ein noethersches Schema. Für alle offenen affinen Mengen $U \subset X$ ist also $\mathscr{O}_X(U)$ ein noetherscher Ring.
Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt konstruierbar, wenn M von der folgenden Form ist

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap U_i),$$

wobei $A_i \subset X$ abgeschlossen und $U_i \subset X$ offen ist.

(a) X sei irreduzibel mit generischen Punkt ω, $M \subset X$ sei konstruierbar. Dann gilt:

M ist dicht in X (d.h. $\overline{M} = X$) $\iff \omega \in M \iff \exists\, \emptyset \neq U \subset X$ offen: $U \subset M$.

Beweis: Sei $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap U_i)$, $A_i \cap U_i \neq \emptyset$.

Dann ist $\overline{M} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{(A_i \cap U_i)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. $\overline{M} = X \Rightarrow X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Da X irreduzibel ist, folgt $A_i = X$ für ein i, also $U_i \subset M$. □

(b) M sei konstruierbar.

(i) Ist $\overline{\{x\}} \subset M$ für alle $x \in M$, so ist M abgeschlossen in X.

(ii) Es sei $y \in M$ wenn immer $\overline{\{y\}} \cap M \neq \emptyset$. Dann ist M offen in X.

3.17 Übung: (Chevalley)
Es sei X, Y noethersche Schemata $f : X \to Y$ sei ein Morphismus von endlichem Typ.
Dann gilt:
Ist $M \subset X$ konstruierbar, so ist $f(M)$ in Y konstruierbar.

Beweis: (1) Sei $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \cap U_i \subset X$, A_i irreduzibel in X, U_i offen in X. Dann ist $f(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f(A_i \cap U_i)$. Es genügt zu zeigen, dass $f(A_i \cap U_i)$ konstruierbar ist.

$A_i \cap U_i$ ist mit der reduzierten Strukturgarbe ein integres Schema und $\overline{f(A_i \cap U_i)}$ ist irreduzibel in Y.

Damit haben wir die Behauptung aus folgende Aussage reduziert.

(2) Es seien X, Y integre noethersche Schemata und $f : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von endlichem Typ. Dann ist $f(X)$ konstruierbar in Y. Dazu zeigen wir:

Es gibt eine offene Menge $U \subset Y$, $U \neq \emptyset$ mit

$$U \subset f(X).$$

Es seien $W \subset X$, $V \subset Y$ affine offene Mengen mit

$$\begin{aligned} &f(W) \subset V, \\ &W = \operatorname{Spec} B, \\ &V = \operatorname{Spec} A. \end{aligned}$$

Die Abbildung $f \mid W : W \to V$ werde von dem injektiven Homomorphismus

$$A \to B$$

induziert, B sei endlich erzeugte A-Algebra. Ohne Einschränkung sei $A \subset B$ Unterring. Wir zeigen folgende

Behauptung: Es gibt ein $a \in A \backslash 0$, so dass

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin \mathfrak{p}\} \subset \{\mathfrak{q} \cap A \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B\}.$$

Für die offene Menge $U = D(a) \subset \operatorname{Spec} A = V \subset Y$ gilt dann also (beachte $f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap A$ für $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$)

$$U \subset f(W) \subset f(X).$$

Die Behauptung wird folgendermaßen bewiesen: Sei $a \in A \backslash 0$ gegeben, $\mathfrak{p} \in D(a)$. Dann ist $\mathfrak{p}$ der Kern des Homomorphismus

$$\varphi : A \to a \backslash \mathfrak{p} \subset K,$$

wobei K ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von $a \backslash \mathfrak{p}$ sei.

Könnte man nun φ zu einem Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} : B \to K$$

fortsetzen, so wäre $\mathfrak{q} = \ker \widetilde{\varphi}$ ein Primideal in B mit

$$\mathfrak{q} \cap A = \ker \varphi = \mathfrak{p}$$

und die Behauptung wäre bewiesen! $\square$

Damit haben wir alles auf den folgenden Satz zurückgeführt.

Satz: Es sei $A \subset B$ eine Erweiterung noetherscher Integritätsbereiche, B sei endlich erzeugte A-Algebra.

Es sei $b \in B \backslash 0$. Dann gibt es ein $a \in A \backslash 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Ist K algebraisch abgeschlossener Körper, so gibt es zu jedem Homomorphismus

$$\varphi : A \to K \text{ mit } \varphi(a) \neq 0$$

einen Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} : B \to K \text{ mit } \widetilde{\varphi}(b) \neq 0 \text{ und } \widetilde{\varphi} \mid A = \varphi.$$

Beweis: 1. Schritt: Wir beginnen mit einem Spezialfall. Es sei $B = A[\beta]$ als A-Algebra von einem Element $\beta \in B$ erzeugt.

x sei eine Unbestimmte und

$$\pi : A[x] \to B$$

sei der Auswertungshomomorphismus

$$\pi(p) := p(\beta).$$

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

(a) π ist ein Isomorphismus.

Es gibt dann Elemente $b_i \in A$ so dass

$$b = \sum_{i=0}^{m} b_i \beta^i$$

mit $b_m \neq 0$. Setze $a := b_m$.

Es sei $\varphi : A \to K$ ein Homomorphismus mit $\varphi(a) \neq 0$. Dann ist

$$p := \sum_{i=0}^{m} \varphi(b_i) x^i \in K[x]$$

ein von Null verschiedenes Polynom. Also gibt es ein $\alpha \in K$ mit

$$p(\alpha) \neq 0.$$

Es sei $\widetilde{\varphi} : B \to K$ definiert durch

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum a_i \beta^i\right) = \sum \varphi(a_i) \alpha^i.$$

Dann ist $\widetilde{\varphi} \mid A = \varphi$ und

$$\widetilde{\varphi}(b) = \sum_{i=0}^{m} \varphi(b_i)\alpha^i = p(\alpha) \neq 0.$$

(b) π ist kein Isomorphismus.

Es sei $\mathfrak{a} = \ker \pi$. Da A noethersch ist, ist auch $A[x]$ noethersch und es gibt somit ein endliches Erzeugendensystem $p_1, \dots, p_s \in A[x]$ von $\mathfrak{a}$.

$$\mathfrak{a} = (p_1, \dots, p_s).$$

Es sei grad $p_1 \leq \dots \leq$ grad p_s.

Lokalisiert man nach dem Leitkoeffizienten von p_1, so kann man ohne Einschränkung annehmen, dass p_1 normiert ist.

Jetzt dividiere man die p_i, $i \geq 2$, mit Rest durch p_1. Die von Null verschiedenen Reste und p_1 erzeugen $\mathfrak{a}$. Man hat also

$$\mathfrak{a} = (p_1, r_2, \dots, r_t)$$

mit $t \leq s$, grad $r_2 \leq \dots \leq$ grad $r_t <$ grad p_1. Ist $t = 1$, so ist $\mathfrak{a} = (p_1)$. Ist $t > 1$, so lokalisiere man nach dem Leitkoeffizienten von r_2 und dividiere dann p_1 und r_j, $j \geq 3$ mit Rest durch r_2.

Man erhält ein neues Erzeugendensystem

$$\mathfrak{a} = (r_2, q_2, \dots, q_u)$$

mit $u \leq t$, grad $q_2 \leq \dots \leq$ grad $q_u <$ grad r_2. Ist $u = 1$, so ist $\mathfrak{a} = (r_2)$. Ist $u > 1$, so wiederhole man das Verfahren.

Nach endlich vielen Schritten bricht dieses Verfahren ab, da sich jedesmal der maximale Grad der Erzeuger verkleinert. Damit haben wir gezeigt:

Es gibt ein $a_0 \in A$, $a_0 \neq 0$, so dass

$$\mathfrak{a}A_{a_0}[x] = (p)$$

mit einem normierten Polynom $p \in A_{a_0}[x]$. Es folgt

$$A_{a_0}[x]/(p) = B \otimes_A A_{a_0} \subset L$$

ist Unterring des Quotientenkörpers L von B. p ist also Primelement in $A_{a_0}[x]$.

Es sei $n =$ grad p. Dann ist $B_{a_0} := B \otimes_A A_{a_0}$ freier A_{a_0}-Modul mit Basis $1, \beta, \dots, \beta^{n-1}$. Insbesondere gibt es ein Polynom $q \in A_{a_0}[x]$ vom Grad $< n$, so dass

$$b = q(\beta).$$

Es sei Q der Quotientenkörper von A.

Dann ist p irreduzibel in $Q[x]$, denn p ist ja ein Primelement in $A_{a_0}[x]$.

Folglich sind p und q teilerfremd in $Q[x]$. Es gibt also eine Darstellung

$$1 = \frac{f_1}{a_1}p + \frac{f_2}{a_2}q$$

mit $f_1, f_2 \in A[x]$, $a_1, a_2 \in A \backslash 0$. Es folgt

$$a_1 a_2 = a_2 f_1 p + a_1 f_2 q. \tag{$*$}$$

Jetzt setzen wir

$$a := a_0 a_1 a_2.$$

Es sei $\varphi : A \to K$ ein Homomorphismus von A in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\varphi(a) \neq 0$. φ besitzt dann eine eindeutig bestimmte Fortsetzung

$$\varphi : A_{a_0} \to K,$$

weil $\varphi(a_0) \neq 0$. Auf diese Weise wird K eine A_{a_0}-Algebra. Es sei $\alpha \in K$ eine Nullstelle von p. Aus $(*)$ folgt

$$\varphi(a_1 a_2) = a_1 f_2(\alpha) q(\alpha).$$

Da aber $\varphi(a) \neq 0$, ist auch $\varphi(a_1 a_2) \neq 0$ und somit gilt

$$q(\alpha) \neq 0.$$

Es sei nun $\widehat{\varphi} : A_{a_0}[x] \to K$ die Fortsetzung von $\varphi : A_{a_0} \to K$ mit

$$\widehat{\varphi}(x) = \alpha.$$

Dann gilt $\widehat{\varphi}(p) = p(\alpha) = 0$ und nach dem Homomorphiesatz induziert $\widehat{\varphi}$ einen Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} : B_{a_0} = A_{a_0}[x]/(p) \to K$$

mit $\widetilde{\varphi}(b) = \widetilde{\varphi}(q(\beta)) = \widehat{\varphi}(q) = q(\alpha) \neq 0$.

Damit ist der Satz für diesen Spezialfall $B = A[\beta]$ bewiesen.

2. Schritt:

Es sei jetzt $B = A[\beta_1, \ldots, \beta_2]$, $\beta_i \in B$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Ist $n = 0$, so ist nicht zu zeigen.

Sei also $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine $a' \in A[\beta_1]$, $a' \neq 0$, so dass jeder Homomorphismus

$$\varphi' : A[\beta_1] \to K$$

mit $\varphi(a') \neq 0$ eine Fortsetzung

$$\widetilde{\varphi} : A[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \to K$$

besitzt mit $\widetilde{\varphi}(b) \neq 0$.

Nach dem ersten Schritt gibt es zu $a' \in A[\beta_1]\backslash 0$ ein $a \in A\backslash 0$, so dass jeder Homomorphismus

$$\varphi : A \to K \text{ mit } \varphi(a) \neq 0$$

eine Fortsetzung $\varphi' : A[\beta_1] \to K$ besitzt mit $\varphi'(a') \neq 0$. $\widetilde{\varphi}$ ist dann auch Fortsetzung von φ. □

Wir haben jetzt also die folgende wichtige Aussage bewiesen.

Ist f ein dominanter Morphismus von endlichem Typ zwischen integren noetherschen Schemata X, Y so enthält die Bildmenge $f(X)$ eine nichtleere offene Menge U von Y.

3. Schritt:

Diese Aussage benutzen wir jetzt, um die Konstruierbarkeit von $f(X)$ in Y mittels Noetherscher Induktion zu beweisen.

Zunächst erklären wir das Beweisverfahren.

Lemma (Noethersche Induktion)

Es sei X ein noetherscher topologischer Raum. $\mathscr{P}$ sei eine Eigenschaft für die abgeschlossenen Teilmengen von X.

Es gelte nun

(1) (Induktionsanfang)

$\mathscr{P}$ gilt für die leere Menge $\emptyset \subset X$.

(2) (Induktionsschluss)

Es sei $Z \subset X$, $\emptyset \neq Z$, abgeschlossen in X. Es sei $\mathscr{P}$ für alle echten abgeschlossenen Teilmengen Z' von Z erfüllt (das ist die Induktionsvoraussetzung). Dann ist $\mathscr{P}$ auch für Z erfüllt.

Aus (1) und (2) folgt: $\mathscr{P}$ gilt für X.

Beweis des Lemmas: Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen $Z \subset X$, für die $\mathscr{P}$ *nicht* gilt. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A} = \emptyset$ gilt, wenn (1) und (2) erfüllt sind. Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Es gibt also ein $Z_1 \in \mathfrak{A}$. Wegen (1) ist $Z_1 \neq \emptyset$. Nach (2) kann dann nicht für alle echten abgeschlossenen Teilmengen von Z_1 die Eigenschaft $\mathscr{P}$ erfüllt sein. Also gibt es ein $Z_2 \in \mathfrak{A}$ mit $\emptyset \neq Z_2 \subsetneqq Z_1$. Iteriert man dieses Argument, so erhält man eine nicht abbrechende Folge

$$Z_1 \supsetneqq Z_2 \supsetneqq Z_3 \supsetneqq \dots$$

abgeschlossener Menge in X. Das steht im Widerspruch zur Noethereigenschaft von X. $\square$

Kommen wir jetzt zum Beweis der Konstruierbarkeit von $f(X)$.

$\mathscr{P}$ sei die folgende Eigenschaft:

Ist $Z \subset Y$ abgeschlossen so gelte $\mathscr{P}$ für Z genau dann, wenn

$$f(f^{-1}(Z)) \text{ in } Y \text{ konstruierbar ist.}$$

Wir zeigen mittels Noetherscher Induktion, dass $\mathscr{P}$ für Y gilt, dass also

$$f(X) = f(f^{-1}(Y)) \text{ in } Y \text{ konstruierbar ist.}$$

(1) Induktionsanfang:

Es gilt $f(f^{-1}(\emptyset)) = \emptyset$ ist konstruierbar in Y.

(2) Induktionsschluss:

Es sei $Z \subset Y$ abgeschlossen und für alle echten abgeschlossenen Teilmengen $Z' \subsetneqq Z$ sei $f(f^{-1}(Z'))$ konstruierbar.

Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$f(f^{-1}(Z)) \text{ konstruierbar ist.}$$

Ist Z reduzibel, so gibt es eine Zerlegung $Z = Z' \cup Z''$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Z', Z'' \subset Z$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind $f(f^{-1}(Z'))$, $f(f^{-1}(Z''))$ konstruierbar und somit auch $f(f^{-1}(Z)) = f(f^{-1}(Z')) \cup f(f^{-1}(Z''))$.

Sei Z irreduzibel.

$Z' = \overline{f(f^{-1}(Z))} \subset Z$ sei die abgeschlossene Hülle von $f(f^{-1}(Z))$. Ist $Z' \neq Z$, so ist $f(f^{-1}(Z)) = f(f^{-1}(Z'))$ nach Induktionsvoraussetzung konstruierbar.

Es sei $Z' = Z$. Dann gibt es eine irreduzible Komponente X' von $f^{-1}(Z)$, so dass $f \mid X' : X' \to Z$ dominant ist.

Nach unserer Arbeit im 2. Schritt gibt es eine nicht-leere offene Menge U in Z, so dass

$$U \subset f(X') \subset Z.$$

Natürlich gilt dann erst recht

$$U \subset f(f^{-1}(Z)) \subset Z.$$

$Z'' := Z \backslash U$ ist eine echte abgeschlossene Menge in Z. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit

$$f(f^{-1}(Z''))$$

konstruierbar. Da U als offene Menge in Z auch konstruierbar ist, ist somit

$$f(f^{-1}(Z)) = f(f^{-1}(U) \cup f^{-1}(Z'')) = U \cup f(f^{-1}(Z''))$$

konstruierbar.

Der Induktionsschluss ist durchgeführt. Nach dem Prinzip der Noetherschen Induktion ist also $f(X)$ konstruierbar. $\square$

3.18 Beispiel: Es sei K ein Körper, $2 \leq m \leq n$.

$$Y = V(x_1, \ldots, x_m) \subset \operatorname{Spec} K[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{A}_K^n.$$

$Y \cong \operatorname{Spec} K[x_{m+1}, \ldots, x_n] = \mathbb{A}_K^{n-m}$. Es sei $S_0 = K[x_1, \ldots, x_n[$ und

$$S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

sei der graduierte Ring mit

$$\text{grad } y_i = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, m \text{ (während grad } x_j = 0).$$

Weiter sei $\mathfrak{a} \subset S$ das von den Elementen

$$x_i y_j - x_j y_i \in S_i \quad (1 \leq i < j \leq m)$$

erzeugte homogene Ideal in S.

$$T = S/\mathfrak{a} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} T_d$$

sei der Restklassenring, $T_d = S_d/\mathfrak{a}_d$. Es gilt

$$T_0 = S_0, \quad T_1 = S_1 / \sum_{i \leq i < j \leq m} (x_i y_j - x_j y_i) S_0, \text{ usw.}$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X := \operatorname{Proj} T \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^{m-1}_K \times_K \mathbb{A}^n_K \arrow[dl, "\pi"] \\
& \operatorname{Spec} S_0 = \mathbb{A}^n_K &
\end{tikzcd}$$

σ heißt die *Aufblasung* von $\mathbb{A}^n_K$ längs Y.
X besitzt eine affine offene Überdeckung

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m,$$

wobei $X_i \cong \operatorname{Spec} T_{(y_i)}$ und y_i als Element in T_1 aufgefasst wird (mit der Relation: $x_j y_i = x_i y_j$ für $i < j$)

$$\sigma_i = \sigma \mid X_i : X_i \to \mathbb{A}^n_K$$

entspricht dem durch den Homomorphismus

$$S_0 \hookrightarrow T_{(y_i)}$$

induzierten Morphismus

$$\operatorname{Spec} T_{(y_i)} \to \mathbb{A}^n_K = \operatorname{Spec} S_0.$$

Dieser Morphismus ist dominant.
Da nun in $T_{(y_i)}$ die x_j mit $i \neq j$, $1 \leq j \leq m$, durch

$$x_j = x_i \frac{y_j}{y_i}$$

gegeben sind, gilt

$$T_{(y_i)} \cong K\left[x_i, x_{m+1}, \ldots, x_n, \frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_m}{y_i}\right]$$

und somit ist

$$X_i \cong \operatorname{Spec} T_{(y_i)} \cong \mathbb{A}^n_K$$

und $\sigma_i : X_i \to \mathbb{A}^n_K$ ist durch den Homomorphismus

$$\varphi_i : K[x_1, \ldots, x_n] \to K\left[x_i, x_{m+1}, \ldots, x_n, \frac{y_1}{y_i}, \ldots, \frac{y_m}{y_i}\right]$$

mit

$$\begin{aligned}
x_i &\longmapsto x_i \\
x_j &\longmapsto x_j \text{ für } j > m \\
x_j &\longmapsto x_i \frac{y_j}{y_i} \text{ für } 1 \leq j \leq m, j \neq i
\end{aligned}$$

induziert.

$\sigma_i(X_i)$ ist konstruierbar im $\mathbb{A}^n_K$ aber weder offen noch abgeschlossen.

Nach Umbenennen der Koordinaten $(x_1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_m}{y_1}, x_{m+1}, \dots, x_n) = (t_1, \dots, t_n)$ erhält man für $i = 1$:

$$\varphi_1 : K[x_1, \dots, x_n] \to K[t_1, \dots, t_n]$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \longmapsto & t_1 \\ x_1 & \longmapsto & t_1 t_2 \\ \vdots & & \\ x_m & \longmapsto & t_1, t_m \\ x_{m+1} & \longmapsto & t_{m+1} \\ \vdots & & \\ x_n & \longmapsto & t_n \end{array}$$

Es folgt

$$f := \sigma_1 = \varphi_1^* : \operatorname{Spec} K[t] \to \operatorname{Spec} K[x]$$

ist dominant, weil φ_1 injektiv ist.

Es gilt weiter

$$f^{-1}(D(x_1)) = D(t_1)$$

und $f \mid D(t_1) : D(t_1) \to D(x_1)$ ist ein Isomorphismus, weil die induzierte Abbildung

$$K[x]_{x_1} \to K[t]_{t_1}$$

offensichtlich ein Isomorphismus ist.

Übertragen wir dies zurück in die alten Bezeichnungen, so ergibt sich

$$\sigma \mid \sigma^{-1}(D(x_i)) \cap X_i : \sigma^{-i}(D(x_i)) \cap X_i \to D(x_i)$$

ist ein Isomorphismus. Es gilt sogar

$$\sigma^{-1}(D(x_i)) \to D(x_i)$$

ist ein Isomorphismus. Dazu beachte man, dass

$$\begin{array}{ccc} \sigma^{-1}(D(x_i)) & \cong & \operatorname{Proj}(T \otimes_{S_0} (S_0)_{x_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(x_i) & \cong & \operatorname{Spec}(S_0)_{x_i} \end{array}$$

Es gilt $T \otimes_{S_0} (S_0)_{x_i} \cong (S_0)_{x_i}[y_i]$, weil in $T \otimes_{S_0} (S_0)_{x_i}$ gilt: $y_j = \frac{x_j}{x_i} y_i$.

Also ist $\operatorname{Proj}(T \otimes_{S_0} (S_0)_{x_i}) = \operatorname{Spec}(S_0)_{x_i}$.

Da $\bigcup_{i=1}^{m} D(x_i) = \mathbb{A}_K^n \setminus Y$, folgt

$$\sigma \mid \sigma^{-1}(\mathbb{A}_K^n \setminus Y) : \sigma^{-1}(\mathbb{A}_K^n \setminus Y) \to \mathbb{A}_K^n \setminus Y$$

ist ein Isomorphismus.
Die Projektion

$$\begin{aligned} K[x_1,\dots,x_n] &\twoheadrightarrow K[x_{m+1},\dots,x_n] \\ x_i &\mapsto 0 \text{ für } i \le m \end{aligned}$$

induziert die Projektion

$$\psi : S \to S' = K[x_{m+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_m].$$

Dabei wird $x_i y_j - x_j y_i$ auf Null abgebildet.
Also wird nach dem Homomorphiesatz ein Epimorphismus

$$T \to S'$$

induziert. Damit ergibt sich das cartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_K^{m-1} \times Y = \operatorname{Proj} S' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_y"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Proj} T = X \arrow[d, "\sigma"] & \subset & \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}_K^{m-1} \times \mathbb{A}_K^n \arrow[dll, "\pi"] \\ Y \arrow[r, hook] & \mathbb{A}_K^n & & \end{tikzcd}$$

Die Faser über einen Punkt $y \in Y$ ist also ein projektiver Raum $\mathbb{P}_{k(y)}^{m-1}$ der Dimension $m-1$.
Y ist m-codimensional in $\mathbb{A}_K^n$.
Bemerkung: $\sigma^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}_K^{m-1} \times Y$ ist das projektivierte Normalenbündel von Y in $\mathbb{A}_K^n$.
Wir bemerken auch:
$E := \sigma^{-1}(Y)$ ist eine abgeschlossene *Hyperfläche* in X, d.h. lokal durch eine Gleichung beschreiben:
$E \cap X_i = V(x_i) \subset X_i$, denn
in X_i ist $x_j = \frac{y_j}{y_i} x_i$ für $i = 1,\dots,m$.
Dabei fassen wir x_i in natürlicher Weise als Schnitt in

$$\mathscr{O}_X(X_i) = K\left[x_i, x_{m+1},\dots,x_n, \frac{y_1}{y_i},\dots,\frac{y_m}{y_i}\right]$$

auf. Insbesondere ist x_i ein Nichtnullteiler in $\mathscr{O}_X(X_i)$.
E ist damit ein Beispiel eines *effektiven Cartier-Divisors* auf X.

3.19 Übung: (Dimension)

Ausführliches zum Dimensionsbegriff in der algebraischen Geometrie findet man in EGA IV (PMIHES 20, 24, 28)

(Grothendiecks EGA findet man unter http://www.nundam.org)

Die Dimensionstheorie ist für Schemata von endlichem Typ über einen Körper einfacher als im allgemeinen Fall.

(siehe: EGA IV (Seconde Partie) §4, PMIHES 24, 1965)

Wir geben einige Ergebnisse an.

Es sei X ein integres Schema von endlichem Typ über einem Körper K.

Es gibt dann eine endliche affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ von X, so dass $U_i \cong \operatorname{Spec} A_i$ und A_i eine endlich erzeugte K-Algebra ist. Da X integer ist, sind die Ringe A_i nullteilerfrei. Ihre Quotientenkörper stimmen alle mit dem Funktionenkörper $K(X)$ von X überein. Dabei ist $K(X)$ der lokale Ring $\mathscr{O}_{X,\omega}$ von X in generischen Punkt ω. Da $\omega \in U_i$, ist $K(X) = K(U_i)$.

Die *Dimension* $\dim X$ von X ist die Dimension des X zugrunde liegenden topologischen Raums, (siehe EGA O_{IV}, 14.1.2, PMIHES 20) also das Supremum der Menge aller Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die eine echte Kette $Z_0 \underset{\neq}{\subset} Z_1 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} Z_n$ irreduzibler abgeschlossener Mengen $Z_i \subset X$ existiert.

Die *Krulldimension* $\dim R$ eines Rings R ist das Supremum der Menge aller natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die eine echte Primidealkette

$$\mathfrak{p}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{p}_1 \underset{\neq}{\subset} \dots, \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{p}_n$$

der Länge n in R existiert. Es gilt $\dim R = \dim \operatorname{Spec} R$.

Weiter gilt (Beweise findet man in EGA IV)

(a) Für alle abgeschlossenen Punkt $x \in X$ gilt:

$$\dim \mathscr{O}_{X,x} = \dim X$$

(b)

$$\dim X = \operatorname{trdeg}_K K(X).$$

(c) Ist $Y \subset X$ irreduzibel und abgeschlossen, so sei

$$\operatorname{codim}(Y,X) := \sup\{n \mid \exists\, Y \underset{\neq}{\subset} Z_1 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} Z_n \subset X,$$
$$Z_i \text{ irreduzibel, abgeschlossen}\}.$$

Für eine beliebige abgeschlossene Menge $Y \subset X$ setzt man

$$\operatorname{codim}(Y,X) = \inf\{\operatorname{codim}(Z,X) \mid Z \text{ irreduzible Komponente von } Y\}.$$

Es gilt

$$\operatorname{codim}(Y,X) = \inf\{\dim \mathscr{O}_{X,y} \mid y \in Y\}.$$

(d) Ist $Y \subset X$ abgeschlossen, so gilt

$$\operatorname{codim}(Y,X) = \dim X - \dim Y.$$

(e) Ist $U \subset X$ offen und nicht-leer, so gilt

$$\dim U = \dim X.$$

3.20 Übung: (Faserdimension)
Es seien X,Y integre Schemata über einem Körper K. $f: X \to Y$ sei ein dominanter Morphismus. X,Y seien von endlichem Typ über K. Dann gilt

(a) Es sei $Y' \subset Y$ irreduzible abgeschlossene Teilmenge und der generische Punkt η' von Y' liege in $f(X)$. Es sei Z eine irreduzible Komponente von $f^{-1}(Y')$ mit $\eta' \in f(Z)$. Dann gilt

$$\operatorname{codim}(Z,X) \leq \operatorname{codim}(Y',Y).$$

Lösung zu (a): Es sei $\omega \in Z$ der generische Punkt von Z. Dann gilt

$$\operatorname{codim}(Z,X) = \dim \mathscr{O}_{X,\omega}$$

und $f(\omega) = \eta'$. Da auch $\operatorname{codim}(Y',Y) = \dim \mathscr{O}_{Y,f(\omega)}$ gilt, müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\dim \mathscr{O}_{X,\omega} \leq \dim \mathscr{O}_{y,f(\omega)}$$

gilt. Da $\mathscr{O}_{X,\omega}$, $\mathscr{O}_{Y,f(\omega)}$ lokale noethersche Ringe sind und $\mathscr{O}_{Y,f(\omega)} \to \mathscr{O}_{X,\omega}$ ein lokaler Homomorphismus ist, gilt nach EGA IV, 5.5.2

$$\dim \mathscr{O}_{X,\omega} \leq \dim \mathscr{O}_{Y,\eta'} + \dim(\mathscr{O}_{X,\omega} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,\eta'}} k(\eta'))$$

und da ω ein 'maximaler' Punkt in $f^{-1}(\eta')$ ist, ist $\mathscr{O}_{X,\omega} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,\eta'}} k(\eta')$ nulldimensional. $\square$

(b) Es sei $e = \dim X - \dim Y$.

e heißt die *relative Dimension* von X über Y. Für alle $y \in f(X)$ und jede irreduzible Komponente Z von $X_y = X \times_y k(y)$ gilt

$$\dim Z \geq e.$$

Lösung zu (b): $Y' := \overline{\{y\}}$ ist irreduzible abgeschlossene Menge in X und y ist der generische Punkt von Y'. Es sei $\widetilde{Z}$ eine irreduzible Komponente von $f^{-1}(Y')$ mit $y \in f(\widetilde{Z})$. Nach (a) gilt

$$\operatorname{codim}(\widetilde{Z}, X) \leq \operatorname{codim} Y', Y$$

und wegen 3.19(d) folgt

$$\dim X - \dim \widetilde{Z} \leq \dim Y - \dim Y',$$

also

$$\dim \widetilde{Z} - \dim Y' \geq e.$$

Es sei L der Funktionenkörper von $\widetilde{Z}$. Dann gilt nach 3.19(b)

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{Z}' - \dim Y' &= \operatorname{trdeg}_K L - \operatorname{trdeg}_K k(y) \\ &= \operatorname{trdeg}_{k(y)} L = \dim Z, \end{aligned}$$

wobei $Z = \widetilde{Z} \times_{Y'} k(y)$. Es gilt also $\dim Z \geq e$. Da jede irreduzible Komponente Z von X_y von dieser Form ist, ist die Aufgabe gelöst.

(c) Es gibt eine offene Menge $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, so dass

$$\dim U_y = e$$

für alle $y \in f(U)$.

Lösung zu (c): Zunächst können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass X und Y affin sind. Da f dominant ist, wird also f durch eine Ringerweiterung

$$B \subset A$$

induziert, wobei A, B endlich erzeugte nullteilerfreie K-Algebren sind und $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$.

$K(X)$ ist der Quotientenkörper von A und $K(Y)$ ist der Quotientenkörper von B. Es gilt

$$e = \operatorname{trdeg}_K K(X) - \operatorname{trdeg}_K K(Y) = \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X).$$

Es sei $(t_1,\dots,t_e)$ eine Transzendenzbasis von $K(X)$ über $K(Y)$. Es sei $g \in A$ ein gemeinsamer Nenner der t_i. Dann gilt $t_i \in A_g$ und

$$B \subset B[t_1,\dots,t_e] \subset A_g$$

und somit die Faktorisierung

$$f \mid D(g) = \pi \circ \widetilde{f}$$

von f mit den von $B \subset B[t_1,\dots,t_e]$ und $B[t_1,\dots,t_e] \subset A_g$ induzierte Morphismen

$$\begin{aligned} \pi : &\quad \mathbb{A}^e_K \times_K Y \to Y, \\ \widetilde{f} : &\quad D(g) \to \mathbb{A}^e_K \times_K Y \to Y. \end{aligned}$$

$\widetilde{f}$ ist dominant und generisch endlich, weil nach Wahl von $t_1,\dots,t_e$

$$K(\mathbb{A}^e_K \times_K Y) = K(Y)(t_1,\dots,t_e) \subset K(X) = K(D(g))$$

eine endliche Erweiterung ist.

Nach Übung 3.13 gibt es eine offene Menge $V \subset \mathbb{A}^e_K \times_K Y$, $V \neq \emptyset$, so dass

$$U = \widetilde{f}^{-1}(V) \to V$$

ein endlicher Morphismus ist. Für alle $y \in f(U)$ ist dann

$$U_y = U \times_Y k(y) = U \times_Y (V \times_Y k(y)) \to V \times_Y k(y)$$

als Basiswechselmorphismus des endlichen Morphismus $\widetilde{f} : U \to V$ wieder endlich.

Damit gilt

$$\dim U_y = \dim(V \times_Y k(y)).$$

Da $V \times_Y k(y)$ offen in $\mathbb{A}^e_{k(y)} = \mathbb{A}^e_K \times_K k(y)$ ist, gilt

$$\dim(V \times_Y k(y)) = \dim \mathbb{A}^e_{k(y)} = e.$$

Damit ist (c) bewiesen.

(d) (Halbstetigkeitssatz von Chevalley)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} F_n = F_n(X/Y) = \{ x \in X \mid {} & \exists \text{ irreduzible Komponente } Z \text{ von } X_y, \\ & \text{wobei } y = f(x), \text{mit } x \in Z, \text{ so dass } \dim Z \geq n \} \end{aligned}$$

Nach (b) gilt für alle $n \leq e$:

$$F_n = X.$$

Weiter gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$F_n \text{ abgeschlossen in } X.$$

Lösung von (d): Induktion nach $\dim X$. $\dim X = 0$. Dann ist $X = \operatorname{Spec} K = Y$, $f = id$, und somit ist nichts zu beweisen.

Es sei $\dim X = d > 0$ und für Morphismen $g : X' \to Y'$ mit $\dim X' < d$ sei schon gezeigt, dass $F_n(X'/Y')$ abgeschlossen in X' liegt.

Da $F_n = X$ für $n \leq e$, brauchen wir nur den Fall $n > e$ zu betrachten.

Nach (c) gibt es eine nicht-leere offene Menge $U \subset X$, so dass

$$\dim U_y = e$$

für alle $y \in f(U)$.

Es sei $X \backslash U = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ die Zerlegung von $X \backslash U$ in irreduzible Komponenten.

Es gilt $\dim X_i < \dim X$ und nach Induktionsvoraussetzung sind die Mengen

$$F_n(X_i/Y_i)$$

abgeschlossen in X_i, also auch in X, für alle $i = 1, \ldots, k$. Dabei ist $Y_i = \overline{f(X_i)}$.

Wir zeigen

$$F_n(X/Y) = \bigcup_{i=1}^{k} F_n(X_i/Y_i).$$

Dann sind wir fertig!

Es sei $x \in F_n(X/Y)$. Dann gibt es eine irreduzible Komponente Z von X_y, $y = f(x)$, durch x mit

$$\dim Z \geq n.$$

Da $n > e$, muss

$$Z \cap U_y = \emptyset$$

gelten, denn sonst wäre $y \in f(U)$ und $Z \cap U_y$ nicht-leere offene Teilmenge von Z, also

$$\dim Z = \dim(Z \cap U_y) \leq \dim U_y = e$$

im Widerspruch zu $\dim Z > e$.

Damit ist $Z \subset (X \backslash U)_y = X_{1,y} \cup \ldots \cup X_{k,y}$.

Da Z irreduzibel ist, folgt

$$Z \subset X_{i,y}$$

für ein i, und somit ist $x \in F_n(X_i/Y_i)$.

Wir haben also

$$F_n(X/Y) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_n(X_i/Y_i).$$

Die andere Inklusion ist trivial. □

Wir kommen jetzt zu den *separierten* und *eigentlichen* Morphismen.

Bekanntlich ist ein topologische Raum X genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ bzgl. der Produkttopologie ist.

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema, so ist die Zariski-Topologie nur in Ausnahmefällen hausdorffsch. Dennoch ist die Diagonale

$$X \to \Delta \subset X \times X = \operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)$$

abgeschlossen, denn die Diagonalabbildung $\Delta : X \to X \times X$ wird von der Multiplikationsabbildung

$$\mu : A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A,\ \mu(a \otimes b) = ab,$$

induziert. μ ist surjektiv, also ist Δ eine abgeschlossene Einbettung. Der Punkt ist, dass die Topologie auf $X \times X$ nicht die Produkttopologie ist, sondern sehr viel feiner als diese!

In der algebraischen Geometrie erhalten wir den Begriff der Separiertheit als Analogon zur Hausdorffeigenschaft topologischer Räume. Der Philosophie Grothendiecks folgend betrachten wir gleich die relative Situation: An Stelle eines Schemas X, also eines $\mathbb{Z}$-Schemas, betrachten wir allgemein ein Y-Schema X, d.h. einen Morphismus $f : X \to Y$.

3.21 Definition: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Der Diagonalmorphismus

$$\Delta : X \to X \times_Y X$$

von X und Y ist derjenige Morphismus, für den

$$p_1 \circ \Delta = id_Z \text{ und } p_2 \circ \Delta = id_X$$

gilt, wobei $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ die Projektionen sind.

f heißt *separiert*: $\iff$ Δ ist abgeschlossene Einbettung.

Man sagt dann auch: X ist separiert über Y. Ist X separiert über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, so nennt man X separiert.

Offensichtlich gilt:

3.22 Satz: Sind X,Y affin, so ist jeder Morphismus $f: X \to Y$ separiert. $\square$

3.23 Korollar: Ein Morphismus $f: X \to Y$ von Schemata ist genau dann separiert, wenn $\Delta(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times_Y X$ ist.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{O}_{X\times_Y X} \to \Delta_* \mathcal{O}_X$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus ist. Das ist eine lokale Aussage und damit erfüllt, weil sie für affine X,Y gilt. $\square$

3.24 Theorem: (Bewertungskriterium für Separiertheit)

Es sei $f: X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ zwischen noetherschen Schemata. Dann ist $f: X \to Y$ genau dann separiert, wenn folgendes 'Bewertungskriterium' erfüllt ist:

Für jeden diskreten Bewertungsring R mit Quotientenkörper K gilt:

Ist $x_0 : \operatorname{Spec} K \to X$ ein K-wertiger Punkt von X, $y : \operatorname{Spec} R \to Y$ ein R-wertiger Punkt von Y mit

$$f(x_0) = y \mid \operatorname{Spec} K,$$

so gibt es höchstens einen R-wertigen Punkt $x : \operatorname{Spec} R \to X$, der x_0 fortsetzt und für den

$$f(x) = y$$

gilt. (Mit anderen Worten: Die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X^\bullet(R) & \longrightarrow & X^\bullet(K) \times_{Y^\bullet(K)} Y^\bullet(R), \\ x & \longmapsto & (x \mid \operatorname{Spec} K, f(x)) \end{array}$$

ist injektiv.)

3.25 Definition: Es seien X,Y noethersche Schemata. Ein Morphismus $f: X \to Y$ heißt *eigentlich*:

$\Longleftrightarrow$ f ist von endlichem Typ, separiert und *universell abgeschlossen*.

Dabei heißt $f: X \to Y$ *abgeschlossen*, wenn $f(Z)$ für abgeschlossene Mengen $Z \subset X$ stets abgeschlossen in Y ist.

f heißt *universell abgeschlossen*, wenn für alle Morphismen $g: Y' \to Y$ der Basiswechselmorphismus $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ abgeschlossen ist.

Bemerkung:

(a) Ein endlicher Morphismus ist stets eigentlich.

(b) $\mathbb{A}^n_K \to \operatorname{Spec} K$, $(n \geq 1)$, ist nicht eigentlich, denn $\pi : \mathbb{A}^{n+1}_K \to \mathbb{A}^1_K$ ist nicht abgeschlossen. $A = \{(x,y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{A}^2_K$ ist abgeschlossen, aber $\pi(A) = \mathbb{A}^1_K \backslash 0$ ist nicht abgeschlossen.

Aber wir werden sehen, dass $\mathbb{P}^n_K \to \operatorname{Spec} K$ eigentlich ist.

Ohne Beweis erwähnen wir

3.26 Theorem: (Bewertungskriterium für eigentliche Morphismen)
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. X, Y seien noethersch. Dann gilt: f ist eigentlich $\iff$
Für jeden Körper K und jeden diskreten Bewertungsring R von K gilt

$$\forall x_0 \in X^\bullet(K), y \in Y^\bullet(R) \text{ mit } f(x_0) = y \mid \operatorname{Spec} K$$
$$\exists ! x \in X^\bullet(R) : x \mid \operatorname{Spec} K = x_0 \text{ und } f(x) = y.$$

□

Illustration:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r, "x_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "y"] \arrow[ur, dashed, "\exists ! x"] & Y
\end{tikzcd}$$

Hat man über dem "gelochtem Raum" $\operatorname{Spec} K$ schon einen Schnitt längs y in X gefunden, so kann man diesen eindeutig fortsetzen zu einem Schnitt über $\operatorname{Spec} R$ längs y in X.
Es gilt $X^\bullet(R) \cong X^\bullet(K) \times_{Y(K)} Y^\bullet(R)$.
Einige wichtige Eigenschaften eigentlicher Morphismen:

3.27 Lemma: Alle vorkommenden Schemata seien noethersch.

(a) Eine abgeschlossene Immersion ist eigentlich.

(b) Die Komposition eigentlicher Morphismen ist eigentlich.

(c) Ist $f : X \to Y$ eigentlich, $g : Y' \to Y$ beliebig, so ist $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ eigentlich.

(d) Sind $f_i : X_i \to Y_i$ eigentlich, so ist auch $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ eigentlich.

(e) Sind in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

h eigentlich, g separiert, so ist f eigentlich.

(f) $f : X \to Y$ ist eigentlich $\iff$

$\forall y \in Y \exists$ offene Umgebung U von y in Y, so dass $f^{-1}(U) \to U$ eigentlich ist.

$\square$

Eine wichtige Klasse eigentlicher Morphismen sind die Projektionen

$$\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$$

und daraus resultierend die projektiven Morphismen, die wir jetzt definieren.

3.28 Definition: Es seien X, Y Schemata.
Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *projektiv*: $\iff$
Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, eine abgeschlossene Einbettung $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$, so dass

$$f = \pi_Y \circ i,$$

wobei $\pi_Y : \mathbb{P}^n_Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times Y \to Y$ die Projektion ist.

3.29 Beispiel: Ist S graduierter Ring mit $A = S_0$, so ist $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Spec} A$ projektiv, falls $S = A[x_0, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subset A[x_0, \dots, x_n]$ ($\deg x_i = 1$).

3.30 Theorem: Ein projektiver Morphismus noetherscher Schemata ist eigentlich.
Zum Beweis hat man auf Grund der allgemeinen Eigenschaften eigentlicher Morphismen nur zu zeigen, dass die Projektion

$$\pi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

eigentlich ist. Nach dem Bewertungskriterium heißt das:

$$i^* : \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(K)$$

ist für alle diskreten Bewertungsring R eine Bijektion, wobei $i : R \to K$ die Inklusion von R in seinen Quotientenkörper ist.

Zum Beweis benutzen wir die folgende Beschreibung der R-wertigen Punkte von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$. Es sei R ein lokaler noetherscher Ring.
(Dann gilt: endlich erzeugte projektive R-Moduln sind frei, siehe Altmann/Kleimann: Introduction to Grothendieck duality. SLN 146.)
Es gilt

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R) = \{[\alpha] \mid \alpha : R^{n+1} \twoheadrightarrow R \text{ ist } R\text{-linear und surjektiv,}\}$$

wobei $[\alpha] = [\alpha']$ genau dann, wenn $\alpha = a \circ \alpha$ mit einem Isomorphismus $a : R \to R$.
Sei R diskreter Bewertungsring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (t)$, t also ein uniformisierender Parameter von R. K sei der Quotientenkörper von R. $i : R \to K$ sei die Inklusion. Die kanonische Abbildung

$$i^* : \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(K)$$

ist gegeben durch

$$i^*([\alpha]) := [\alpha \otimes_R id_K]$$

(Ist $\alpha : R^{n+1} \to R$ surjektiv, so ist auch $\alpha \otimes_K id_K : K^{n+1} \to K$ surjektiv!)
Wir zeigen zunächst die Injektivität von i^*:
Seien dazu $\alpha, \alpha' : R^{n+1} \to R$ surjektive K-lineare Abbildungen. Es gelte

$$i^*[(\alpha)] = i^*[(\alpha')],$$

d.h. es gibt einen K-linearen Isomorphismus

$$\lambda : K \to K,$$

so dass

$$\alpha \otimes_K id_K = \lambda(\alpha \otimes_R id_K).$$

Schreibt man α in Koordinaten

$$\alpha(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i$$

mit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in R^{n+1}$, entsprechend

$$\alpha'(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha'_i x_i \text{ mit } (\alpha'_0, \dots, \alpha'_n) \in R^{n+1},$$

so bedeutet $\alpha' \otimes_R id_K = \lambda(\alpha \otimes id_K)$, dass

$$\alpha'_i = \lambda \alpha_i \text{ für } i = 0, \dots, n.$$

Da α surjektiv ist, gibt es ein $(x_0, \dots, x_n) \in R^{n+1}$, so dass

$$\sum \alpha_i x_i = 1,$$

also $\lambda = \sum \lambda \alpha_i x_i = \sum \alpha'_i x_i \in R$.
Da α' ebenfalls surjektiv ist, gibt es ein $(x'_0, \dots, x'_n) \in R^{n+1}$ mit

$$\sum \alpha'_i x'_i = 1,$$

also

$$\lambda \sum \alpha_i x'_i = 1.$$

Damit ist λ eine Einheit in R und es gilt

$$[\alpha] = [\alpha'] \text{ in } \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(R).$$

Damit ist i^* injektiv.
Jetzt zeigen wir die Surjektivität von i^*.
Es sei ein Epimorphismus

$$\alpha : K^{n+1} \to K$$

gegeben. $\alpha(x_0, \dots, x_n) = \sum \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in K$
v sei die zu R gehörige diskrete Bewertung auf K.

$$k_i = v(\alpha_i) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Da α surjektiv ist, gibt es ein i mit $\alpha_i \neq 0$, also $k_i < \infty$. Wir wählen $\lambda \in K \backslash 0$, so dass

$$\begin{array}{rrcl} & v(\lambda \alpha_i) & \geq & 0 \text{ für alle } i = 0, \dots, n \\ \text{mit} & v(\lambda \alpha_{i_0}) & = & 0 \text{ für ein } i_0. \end{array}$$

Dann gilt $\lambda \alpha_i \in R$ für alle i und $\lambda \alpha_{i_0}$ ist Einheit in R, also ist

$$\alpha' : R^{n+1} \to R$$

mit $\alpha'(x_0, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda \alpha_i x_i$ surjektiv und

$$\alpha' \otimes_R id_k = \lambda \alpha$$

also $i^*([\alpha']) = [\alpha]$.

Damit ist auch die Surjektivität bewiesen. $\square$

Bemerkung: Wir werden noch zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}) = \{[\alpha : \mathscr{O}_X^{n+1} \to \mathscr{L}] \mid \mathscr{L} \text{ invertierbare Garbe, } \alpha \text{ epimorph}\}$$

und $[\alpha : \mathscr{O}_X^{n+1} \to \mathscr{L}] = [\alpha' : \mathscr{O}_X^{n+1} \to \mathscr{L}'] \iff$
$\exists \lambda : \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ iso, s.d. $\lambda \circ \alpha = \alpha'$.

Ist X affin, $X = \operatorname{Spec} A$, so ist ein 'invertierbarer Quotient'

$$\alpha : \mathscr{O}_X^{n+1} \to \mathscr{L}$$

vollständig beschrieben durch die surjektive A-lineare Abbildung

$$\alpha_X : A^{n+1} \twoheadrightarrow L,$$

wobei $L = H^0(X, \mathscr{L})$. Ist A ein lokaler noetherscher Ring, so gilt $L \cong A$ und wir haben die oben benutzte Beschreibung.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Garbentheorie ausbauen.

Die $\mathscr{O}_X$-Modulgarben auf einem Schema X werden eingeführt. Die Operationen der linearen Algebra werden auf $\mathscr{O}_X$-Modulgarben übertragen. Im Mittelpunkt stehen die sogenannten kohärenten Garben.

Es wird sich zeigen, dass die kohärenten Garben auf affinen Schemata genau den endlich erzeugten Moduln über einen Ring entsprechen.

Es sei bemerkt, dass nicht alle abelschen Garben auf einem Schema X zu $\mathscr{O}_X$-Modulgarben gemacht werden können.

Zum Beispiel ist die Garbe $\mathscr{O}_X^\times$ der Einheiten in $\mathscr{O}_X$ keine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe aber dennoch sehr wichtig im Zusammenhang mit den invertierbaren Garben auf X.

4 Modulgarben

Wir führen zunächst einige Grundbegriffe ein. Es sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein Schema (oder allgemeiner irgendein geringter Raum).

Ein abelsche Garbe $\mathscr{F}$ auf X heißt $\mathscr{O}_X$*-Modulgarbe*, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ eine Multiplikation

$$\mathscr{O}_X(U) \times \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$$

gegeben ist, so dass dadurch $\mathscr{F}(U)$ ein $\mathscr{O}(U)$-Modul wird und sodass für $U \subset V$ offen

$$\rho_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

ein mit $\rho_{V,U} = \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_X(U)$ verträglicher Homomorphismus ist, d.h.

$$\rho_{V,U}(sf) = \rho_{V,U}(s)\rho_{V,U}(f)$$

für $s \in \mathscr{O}_X(V)$, $f \in \mathscr{F}(U)$ gilt.

Ein Garbenmorphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ von $\mathscr{O}_X$-Modulgarben $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ heißt $\mathscr{O}_X$*-Modulhomomorphismus*, wenn

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

für alle U ein $\mathscr{O}_X(U)$*-Modulhomomorphismus* ist.

Mit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ bezeichnen wir die additive abelsche Gruppe aller $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismen $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$.

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$

ist die Garbe

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F} \mid U, \mathscr{G} \mid U).$$

Sie heißt auch '*Homgarbe*'.

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$$

ist die zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{G}(U)$$

assoziierte Garbe. $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ heißt das *Tensorprodukt* von $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ über $\mathscr{O}_X$.

Kern, Cokern, Bild eines $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismus sind wieder $\mathscr{O}_X$-Modulgarben.

Man hat den Begriff der *exakten Sequenz* von $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismen.

Die *direkte Summe* von $\mathscr{O}_X$-Modulen ist wieder ein $\mathscr{O}_X$-Modul.

Eine *Idealgarbe* ist ein $\mathscr{O}_X$-Untermodul von $\mathscr{O}_X$.

Ein $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$ heißt *frei* vom Rang n, wenn $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_X \otimes \ldots \otimes \mathscr{O}_X$ (n-mal).

Ein $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$ heißt *lokalfrei* vom Rang n, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, so dass

$$\mathscr{F} \mid U \text{ frei vom Rang } n \text{ ist.}$$

Ist $\mathscr{F}$ lokalfrei vom Rang n, so ist auch die duale $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe

$$\mathscr{F}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)$$

lokalfrei vom Rang n. Es gibt einen kanonischen $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\sigma : \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^* \to \mathscr{O}_X,$$

der von

$$\sigma_x : \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{F}^*_{X,x} \to \mathscr{O}_{X,x}$$
$$\sigma_x(f, \varphi) := \varphi(f)$$

induziert ist.

Ist $\mathscr{F}$ lokalfrei vom Rang 1, so auch $\mathscr{F}^*$, und σ ist ein Isomorphismus. Man nennt daher $\mathscr{F}$ *invertierbare* $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe.

$\mathscr{F}^*$ ist in gewisser Weise ein *Inverses* zu $\mathscr{F}$, denn

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^* \cong \mathscr{O}_X.$$

$\mathscr{O}_X$ ist ein neutrales Element:

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X \cong \mathscr{F}.$$

Die Isomorphieklassen $[\mathscr{L}]$ invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modulgarben $\mathscr{L}$ bilden mit der Multiplikation

$$[\mathscr{L}] \cdot [\mathscr{L}'] := [\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}']$$

eine (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe $\mathrm{Pic}(X)$ mit dem Einselement $1 = [\mathscr{O}_X]$, die sogenannte *Picardgruppe* von X.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe, so ist die Bildgarbe $f_*\mathscr{F}$ in natürlicher Weise eine $\mathscr{O}_Y$-Modulgarbe, denn für $V \subset Y$ offen hat man $\theta_V : \mathscr{O}_Y(V) \to \mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$ und somit

$$\mathscr{O}_Y(V) \times f_*\mathscr{F}(V) \to f_*\mathscr{F}(V)$$

mit $(g, s) \mapsto \theta_V(g) \cdot s$.

$\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der $\mathscr{O}_X$-Modulgarben auf die Kategorie der $\mathscr{O}_Y$-Modulgarben.

Ist X ein K-Schema, $f : X \to \operatorname{Spec} K$, K Körper, der Strukturmorphismus, so ist

$$\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F} = \Gamma(X,\mathscr{F}) = H^0(X,\mathscr{F})$$

ein kovarianter Funktor in die Kategorie der K-Vektorräume.
Die Gruppe der globalen Schnitte $H^0(X,\mathscr{F})$ einer $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe auf einem K-Schema ist also ein K-Vektorraum.
Sei nun $\mathscr{G}$ eine $\mathscr{O}_Y$-Modulgarbe. Dann ist $f^{-1}\mathscr{G}$ eine $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-Modulgarbe. Es sei $f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ der zu $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ adjungierte Morphismus. Man setzt

$$f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}(\mathscr{O}_Y)} \mathscr{O}_X.$$

Es gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

4.1 Definition: Es sei A ein Ring, M ein A-Modul. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ Primideal, so sei $M_\mathfrak{p} = M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von M in $\mathfrak{p}$.

$$M_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{m}{p} \mid m \in M, f \in A \backslash \mathfrak{p} \right\}.$$

Analog zur Definition der Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ auf $X = \operatorname{Spec} A$ definieren wir eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe $\widetilde{M}$ auf X:
Für $U \subset X$ offen sei

$$\widetilde{M}(U) \subset \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$$

der $\mathscr{O}_X(U)$-Untermodul aller Familien

$$s = (s(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p}$$

mit der Eigenschaft:
$\forall\ \mathfrak{p} \in U \exists$ Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U und Elemente $m \in M$, $f \in A$, so dass

$$\forall \mathfrak{q} \in U : f \in \mathfrak{q} \text{ und } s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f}.$$

Offensichtlich ist $\widetilde{M}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe auf X mit folgenden Eigenschaften

(i) $\widetilde{M}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in X$.

(ii) $\widetilde{M}(D(f)) = M_f = \{ \frac{m}{f^k} \mid m \in M, k \in \mathbb{N} \} = M \otimes_A A_f$ für alle $f \in A$.

(iii) $M = H^0(X, \widetilde{M})$.

4.2 Satz: Sei $X = \operatorname{Spec} A$, A ein Ring. $\varphi : A \to B$ sei ein Ringhomomorphismus, $Y = \operatorname{Spec} B$, $f : Y \to X$ sei der von φ induzierte Morphismus. Dann gilt

(a) $M \mapsto \widetilde{M}$ ist ein exakter volltreuer kovarianter Funktor von der Kategorie der A-Moduln in der Kategorie der $\mathscr{O}_X$-Modulgarben.

(b) Für A-Moduln M, N gilt

$$\widetilde{M \otimes_A N} = \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{N}.$$

(c) Für eine Familie (M_i) von A-Moduln gilt

$$(\bigoplus M_i)^\sim = \bigoplus \widetilde{M}_i.$$

(d) Für B-Moduln N, sei ${}_AN$ der via φ erzeugte A-Modul, ($N = {}_AN$ als additive Gruppe). Dann gilt

$$f_*(\widetilde{N}) = ({}_AN)^\sim$$

(e) Für A-Moduln M gilt

$$f^*(\widetilde{M}) = (M \otimes_A B)^\sim.$$

□

4.3 Definition: Es sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein Schema, $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe.

(a) $\mathscr{F}$ heißt *quasikohärent* $\iff$

Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, A_i-Moduln M_i, so dass

$$\mathscr{F} \mid U_i \cong \widetilde{M}_i \text{ für alle } i \in I.$$

(b) $\mathscr{F}$ heißt *kohärent*, wenn außerdem M_i als endlich erzeugter A_i Modul gewählt werden kann.

4.4 Beispiel: (a) Lokalfreie $\mathscr{O}_X$-Modulgarben von endlichem Rang sind kohärent.

(b) $\mathscr{O}_X$-Modulgarben sind nicht notwendigerweise quasikohärent!

Sei $U \subset X$ offen, $j_!\mathscr{O}_U$ ist im allgemeinen nicht quasikohärent. $j_!\mathscr{O}_U$ ist die Garbe zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} 0, & V \not\subset U \\ \mathscr{O}_X(V), & V \subset U \end{cases}$$

(c) Sei X integer, $K = K(X) = \mathscr{O}_{X,\omega}$ sei der Funktionenkörper von X.

Dann ist die konstante Prägarbe

$$\mathscr{K}_X = \mathscr{K} \text{ mit } \mathscr{K}(U) = K \text{ für } U \neq \emptyset$$

eine Garbe und offensichtlich $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe. Es gilt, wie man sofort sieht:

$$\mathscr{K}|_U = \widetilde{K} \text{ für jede offene affine Menge} U \subset X, U \neq \emptyset.$$

$\mathscr{K}$ ist also quasikohärent.

4.5 Lemma: Es sei $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$, $U = D(f)$. $\mathscr{F}$ sei quasikohärent auf X.

(a) Der Kern der Restriktionsabbildung

$$\rho_{X,U} : H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(U, \mathscr{F})$$

ist der A-Untermodul

$$\{s \in H^0(X, \mathscr{F}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : f^n s = 0\} \text{ von } H^0(X, \mathscr{F}).$$

(b) Ist $s \in H^0(U, \mathscr{F})$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$f^n s = t \mid U \text{ für ein } t \in H^0(X, \mathscr{F})$$

d.h. Die von $\rho_{X,U}$ induzierte Abbildung

$$\begin{array}{rcl} H^0(X, \mathscr{F})_f & \longrightarrow & H^0(U, \mathscr{F}) \\ \dfrac{s}{f^k} & \longmapsto & (f \mid U)^{-k} \cdot s \mid U \end{array}$$

ist surjektiv.

(a) und (b) bedeuten, dass $H^0(D(f), \mathscr{F}) = H^0(X, \mathscr{F})_f$.

Beweis: Zunächst überlegt man sich mit Hilfe von Def. 4.1 und der Eigenschaft 4.1 (ii) leicht, dass es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i), \quad g_i \in A, \text{ von } X$$

gibt, so dass

$$\mathscr{F} \mid (D(g_i) \cong \widetilde{M}_i$$

wobei M_i ein A_{g_i}-Modul ist.
zu (a): Sei $s \in H^0(X, \mathscr{F})$ und $s \mid D(f) = 0$. Sei $s_i = s \mid D(g_i)$. Dann gilt nach 4.1 (iii) $s_i \in M_i$. Es folgt

$$s_i \mid D(fg_i) = s \mid D(f) \cap D(g_i) = 0,$$

also ist $s_i = 0$ in der Lokalisierung $(M_i)_f$, somit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$f^m s_i = 0 \text{ in } M_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt also $f^m s \mid D(g_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Da $\mathscr{F}$ eine Garbe ist und $X = \bigcup D(g_i)$, folgt $f^n s = 0$. □
zu (b): Es sei $t \in H^0(D(f), \mathscr{F})$.
Da $t \mid D(f) \cap D(g_i) \in (M_i)_f$, gibt es ein m und Elemente $t_i \in M_i$, so dass

$$t_i = f^m t \text{ auf } D(fg_i) \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

$$\begin{array}{rrcl} & t_i \mid D(fg_ig_j) & = & f^m t = t_j \mid D(fg_ig_j) \\ \Rightarrow & t_i - t_j & = & 0 \text{ auf } D(f) \cap D(g_ig_j). \end{array}$$

Nach (a) gibt es ein k, so dass

$$f^k(t_i - t_j) = 0 \text{ in } D(g_ig_j)$$

für alle i, j. Damit gilt

$$f^k t_i \mid D(g_ig_j) = f^k t_j \mid D(g_ig_j).$$

Da $\mathscr{F}$ eine Garbe ist, gibt es einen Schnitt $s \in H^0(X, \mathscr{F})$ mit

$$s \mid D(g_i) = f^k t_i.$$

Es folgt

$$s \mid D(fg_i) = f^{k+m} t \mid D(fg_i),$$

also $s \mid D(f) = f^{k+m} t$. □

4.6 Satz: Sei X ein Schema, $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe. Ist $\mathscr{F}$ quasikohärent, so gilt:
$\forall\, U \subset X$ offen und affin $\exists$ A-Modul M, wobei $A = \mathscr{O}_X(U)$, so dass

$$\mathscr{F} \mid U \cong \widetilde{M}.$$

Ist X noethersch und $\mathscr{F}$ kohärent, so gilt $\forall\, U \subset X$ offen, $A = \mathscr{O}_X(U)$ $\exists$ endlich erzeugter A-Modul M, so dass

$$\mathscr{F} \mid U \cong \widetilde{M}.$$

Beweis: Da für $U \subset X$ offen auch $\mathscr{F} \mid U$ quasikohärent ist, genügt es zu zeigen, dass für affine Schemata $X = \operatorname{Spec} A$ jede quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X von der Form $\widetilde{M}$ ist.

Wir betrachten einfach

$$M := H^0(X, \mathscr{F}).$$

Dann ist $\widetilde{M}$ quasikohärent auf X und es gibt eine kanonischen $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\alpha : \widetilde{M} \to \mathscr{F},$$

der wie folgt erklärt ist:

Ist $U \subset X$ offen und

$$s = (s(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in U} \in \widetilde{M}(U),$$

so setzt man

$$\alpha_U(s) \in \mathscr{F}(U)$$

als denjenigen Schnitt, für den

$$(\alpha_U(s))_{\mathfrak{p}} := \rho_{\mathfrak{p}}(s(\mathfrak{p})) \in \mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$$

für alle $\mathfrak{p} \in U$. Dabei bezeichnet

$$\rho_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to \mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$$

die von $\rho_{\mathfrak{p}} : M = \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$ induzierte Abbildung.

Sei nun $X = \bigcup D(g_i)$ mit $\mathscr{F} \mid D(g_i) \cong \widetilde{M}_i$, wobei M_i ein A_{g_i}-Modul ist. Es gilt $\mathscr{F}(D(g_i)) = M_{g_i}$ nach Lemma 4.4 und somit ist $M_{g_i} \xrightarrow{\cong} M_i$ Isomorphismus. Damit ist für $\mathfrak{p} \in D(g_i)$:

$$\rho_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} = (M_{g_i})_{\mathfrak{p}} \to \mathscr{F}_{\mathfrak{p}} = (M_i)_{\mathfrak{p}}$$

ein Isomorphismus, also

$$\alpha : \widetilde{M} \to \mathscr{F} \text{ ein Isomorphismus.}$$

Den Fall, dass X noethersch und $\mathscr{F}$ kohärent ist, lassen wir als Übung. □

4.7 Korollar: Sei $X = \operatorname{Spec} A$.

$$M \mapsto \widetilde{M}$$

ist eine Äquivalenz von der Kategorie der A-Moduln auf die Kategorie der quasikohärenten $\mathscr{O}_X$-Modulgarben. Das Inverse ist der Schnittfunktor

$$\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F}).$$

□

Man hat einen natürlichen Isomorphismus

$$\alpha : \Gamma(X, \mathscr{F})^{\sim} \to \mathscr{F}$$

und einen natürlichen Isomorphismus

$$\beta : M \to \Gamma(X, \widetilde{M}).$$

Wichtig ist die folgende Aussage:

4.8 Satz: Sei X ein affines Schema und $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathscr{O}_X$-Modulgarben. $\mathscr{F}'$ sei quasikohärent. Dann ist die Sequenz

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}') \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

exakt.

Beweis: Da der Schnittfunktor linksexakt ist, genügt es zu zeigen, dass

$$H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'')$$

surjektiv ist.
Sei dazu $s \in H^0(X, \mathscr{F}'')$. Da $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ surjektiv ist, gilt: Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $D(f)$ von x, so dass $s \mid D(f)$ Bild eines Schnittes $t \in H^0(D(f), \mathscr{F})$ ist. Für solche f gilt:
Behauptung: $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $f^n s$ ist Bild eine Schnittes $\widetilde{s} \in H^0(X, \mathscr{F})$.
Dazu wählen wir eine endliche offene Überdeckung $X = \bigcup D(g_i)$, so dass

$$s \mid D(g_i) \text{ Bild eines Schnittes } t_i \in H^0(D(g_i), \mathscr{F}) \text{ ist.}$$

Es folgt
$$t - t_i \mid D(g_i f) \in H^0(D(g_i f), \mathscr{F}').$$
Da $\mathscr{F}'$ quasikohärent ist, gibt es nach Lemma 4.4 ein n, so dass

$$f^n(t - t_i) \mid D(g_i f)$$

Einschränkung eines Schnittes

$$u_i \in H^0(D(g_i), \mathscr{F}')$$

ist. Wir setzen
$$t_i' := f^n t_i + u_i \in H^0(D(g_i), \mathscr{F}).$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
t_i' \mid D(g_i f) &= f^n t_i \mid D(g_i f) + f^n(t - t_i) \mid D(g_i f) \\
&= f^n t \mid D(g_i f)
\end{aligned}
$$

Nach Definition wird t_i' unter $H^0(D(g_i), \mathscr{F}) \to H^0(D(g_i), \mathscr{F}'')$ auf $f^n s \mid D(g_i)$ abgebildet, über $D(g_i g_j)$ stimmen also die Bilder von t_i' und t_j' überein, und somit gilt

$$t_i' - t_j' \mid D(f g_i g_j) \in H^0(D(g_i g_j), \mathscr{F}').$$

Offensichtlich gilt

$$t_i' - t_j' \mid D(f g_i g_j) = 0.$$

Da $\mathscr{F}'$ quasikohärent ist, folgt nach Lemma 4.4(a)

$$f^m(t_i' - t_j') = 0 \text{ in } H^0(D(g_i g_j), \mathscr{F}')$$

für ein m, welches nicht von i, j abhängt. Man erhält einen Schnitt $t'' \in H^0(X, \mathscr{F})$ mit

$$t'' \mid D(g_i) = f^m t_i'$$

für alle i. Unter $H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'')$ wird t'' auf $f^{m+n} s$ abgebildet.

$\widetilde{s} := t''$ ist der gesuchte Schnitt. Die Behauptung ist bewiesen.

Jetzt überdecke man X durch $D(f_i)$, $i = 1, \ldots, r$, so dass $s \mid D(f_i)$ Bild eines Schnittes in $H^0(D(f_i), \mathscr{F})$ ist. Nach der Behauptung gibt es globale Schnitte $t_i \in H^0(X, \mathscr{F})$, so dass t_i unter $H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'')$ auf $f_i^n s$ abgebildet wird für ein von i unabhängiges n. Da $X = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i)$, ist $(f_1^n, \ldots, f_r^n)$ das Einheitsideal und somit gibt es Elemente $a_i \in A$, so dass

$$1 = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i^n.$$

Setze $t := \sum a_i t_i$. Dann ist $t \in H^0(X, \mathscr{F})$ und t wird auf $\sum a_i f_i^n s = s$ abgebildet. Damit ist die Surjektivität von

$$H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'')$$

gezeigt. □

Bemerkung: Es gilt $H^1(X, \mathscr{F}') = 0$ für affine Schemata X und quasikohärente Garben $\mathscr{F}'$ auf X, wie wir noch zeigen werden. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz ergibt sich dann die Aussage des Satzes.

4.9 Satz: Sei X ein Schema, $\mathscr{F}', \mathscr{F}, \mathscr{F}''$ seien $\mathscr{O}_X$-Modulgarben.

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

sei eine exakte Sequenz. Dann gilt:

Sind zwei der Garben $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}''$ quasikohärent, so auch die dritte.

Ist X noethersch, so gilt die entsprechende Aussage für kohärente Garben.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $X = \operatorname{Spec} A$ affin.

(a) $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, $\mathscr{F} = \widetilde{M}''$, seien quaiskohärent. Dann ist ψ von einem A-Modulhomomorphismus $\psi_X : M \to M''$ induziert. Es sei $M' := \ker \psi_X$. Dann ist $0 \to M' \to M \to M''$ exakt und somit auch

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{M}' \arrow[r] & \widetilde{M} \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, equal] & \widetilde{M}'' \arrow[d, equal] \\ & & \mathscr{F} & \mathscr{F}'' \end{tikzcd}$$

Es folgt $\mathscr{F}' = \ker \psi = \widetilde{M}'$ ist quasikohärent. Ist X noethersch, also A noethersch, so ist M' endlich erzeugt, wenn M es ist.

(b) $\mathscr{F}' = \widetilde{M}'$, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, seien quasikohärent. Dann wird $\varphi : \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ durch $M' \to M$ beschrieben. Es sei $M'' := \operatorname{coker} \psi_X$. Dann ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt und folglich nach Satz 4.2 (a) auch

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \widetilde{M}'' \to 0.$$

Daraus folgt $\mathscr{F}'' \cong \widetilde{M}''$ ist quasikohärent. Ist X noethersch und $\mathscr{F}$ kohärent, so ist M endlich erzeugter A-Modul, also auch M'' und somit ist $\mathscr{F}''$ dann kohärent.

(c) Es seien $\mathscr{F}' = \widetilde{M}'$, $\mathscr{F}'' = \widetilde{M}''$ quasikohärent. Nach Satz 4.7 ist dann

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}') \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'') \to 0$$

exakt. Mit $M := H^0(X, \mathscr{F})$ ist also

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

exakt. Man erhält dann folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{M}' \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \widetilde{M}'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{F}' \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F}'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Der kanonische Homomorphismus

$$\alpha : \widetilde{M} \to \mathscr{F}$$

ist nach dem ‘Fünferlemma’ ein Isomorphismus, also ist $\mathscr{F}$ quasikohärent.

Ist X noethersch und sind M', M'' endlich erzeugte A-Moduln, so ist auch M endlich erzeugt, $\mathscr{F}$ also kohärent.

□

4.10 Satz: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

(a) Ist $\mathscr{G}$ quasikohärenter $\mathscr{O}_Y$-Modul, so ist $f^*\mathscr{G}$ quasikohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul.

(b) Sind X, Y noethersch und ist $\mathscr{G}$ kohärenter $\mathscr{O}_Y$-Modul, so ist $f^*\mathscr{G}$ kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul.

(c) Es sei X noethersch. Ist $\mathscr{F}$ quasikohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul, so ist $f_*\mathscr{F}$ quasikohärenter $\mathscr{O}_Y$-Modul.

Beweis: zu (a): Ohne Einschränkung seien X und Y affin und dann ist die Behauptung einfach eine Folgerung aus Satz 4.2 (e).

zu (b): Das folgt genauso wie (a).

zu (c): Hier ist die Aussage lokal in Y. Wir können also *OE* Y als affin annehmen. Da X noethersch ist, gibt es eine endliche affine offene Überdeckung

$$X = \bigcup U_i.$$

Dann ist $U_i \cap U_j$ nicht notwendig affin (es sei denn X ist separiert über Y) aber als offener Teil eines noetherschen Raumes quasikompakt. $U_i \cap U_j$ besitzt also eine endliche offene affine Überdeckung

$$U_i \cap U_j = \bigcup_k U_{ijk}.$$

Nach Satz 4.2 (d) sind die Bildgarben

$$\begin{array}{l} f_{i*}(F \mid U_i) \\ f_{ijk*}(F \mid U_{ijk}) \end{array}$$

quasikohärent, wobei $f_i := f \mid U_i$, $f_{ijk} := f \mid U_{ijk}$. Die durch die Restriktionsabbildungen induzierte Sequenz von $\mathscr{O}_Y$-Modulgarben

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow \bigoplus_i f_{i*}(\mathscr{F} \mid U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_{ijk*}(\mathscr{F} \mid U_{ijk})$$

ist exakt, da $\mathscr{F}$ eine Garbe ist.

Als Kern eines $\mathscr{O}_Y$-Modulhomomorphismus quasikohärenter Garben ist somit $f_*\mathscr{F}$ ebenfalls quasikohärent.

(Das überlegt man sich leicht wie in 4.8 (a).) □

Bemerkung: Es seien X, Y noethersch und f ein Morphismus von X nach Y von endlichem Typ. Ist $\mathscr{F}$ kohärente $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe, so kann man fragen, ob $f_*\mathscr{F}$ kohärente $\mathscr{O}_Y$-Modulgarbe ist. Das ist im allgemeinen offensichtlich falsch: Ist etwa

$$X = \operatorname{Spec} A, \quad Y = \operatorname{Spec} B,$$

f von $B \subset A = B[x_1 \ldots, x_m]$ induziert, so ist $B[x_1 \ldots, x_m]$ als B-Modul aufgefasst im allgemeinen nicht endlich, $f_*\mathscr{O}_X = ({}_BA)^\sim$ also *nicht* kohärent als $\mathscr{O}_Y$-Modulgarbe.

Ist $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus, so ist $f_*\mathscr{F}$ kohärent, wenn $\mathscr{F}$ kohärent ist. Ist $\mathscr{F}$ lokalfrei vom Rang r auf X und f vom Grad d und $f_*\mathscr{O}_X$ lokalfrei vom Rang d, so ist $f_*\mathscr{F}$ lokalfrei vom Rang $d \cdot r$.

Um zu sehen, dass $f_*\mathscr{O}_X$ lokalfrei vom Rang d ist, genügt es eine offene affine Überdeckung

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

zu finden, so dass $M_i = \mathscr{O}_X(f^{-1}(V_i))$ freier $\mathscr{O}_Y(V_i)$-Modul vom Rang d ist.

Dann ist

$$(f_*\mathscr{O}_X) \mid V_i = \widetilde{M}_i$$

frei vom Rang d, also $f_*\mathscr{O}_X$ lokalfrei vom Rang d. Vgl. Beispiel 3.14. Dies ist eine wichtige Methode lokalfreie Garben auf Y zu konstruieren.

Von fundamentaler Bedeutung ist der *Kohärenzsatz* für eigentliche Morphismen. Es sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus noetherscher Schemata. Dann ist die Bildgarbe $f_*\mathscr{F}$ jeder kohärenter Garbe $\mathscr{F}$ wieder kohärent. (siehe EGA III. 3.2.1) Für projektive Morphismen werden wir dies beweisen.

Insbesondere ist der K-Vektorraum $H^0(X, \mathscr{F})$ der Schnitte in einer kohärenten Garbe $\mathscr{F}$ über einem projektiven K-Schema X endlich dimensionaler K-Vektorraum. Die Dimensionszahlen

$$\dim_K H^0(X, \mathscr{F})$$

und allgemeiner die Dimensionszahlen der ebenfalls endlich dimensionalen höheren Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathscr{F})$ sind wichtige Invarianten des K-Schemas X.

Wir kommen zu den quasikohärenten und kohärenten Garben auf $\operatorname{Proj} S$.

Es gibt eine gewisse Analogie zu den quasikohärenten Garben auf $\operatorname{Spec} A$. Hier ist die Konstruktion jedoch verwickelter.

Insbesondere werden wir die invertierbaren Garben $\mathscr{O}_X(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, kennenlernen, die von fundamentaler Bedeutung für die projektive algebraische Geometrie sind.

4.11 Definition: Es sei S ein graduierter Ring und M ein graduierter S-Modul (also $M = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}} M_k$, wobei M_k abelsche Gruppe ist und M S-Modul mit

$$S_d \times M_k \to M_{k+d} \text{ für alle } d, k.$$

Insbesondere sind alle M_k S_0-Moduln).

Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, also $\mathfrak{p} \subset S$ homogenes Primideal mit $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$, setzt man

$$M_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{m}{f} \mid m \in M, f \in S \backslash \mathfrak{p} \text{ homogen vom selben Grad} \right\}$$

Die zu M assoziierte Garbe $\widetilde{M}$ auf $\operatorname{Proj} S$ wird dann wie folgt definiert.

Es sei $U \subset \operatorname{Proj} S$ offen. Man definiert $\widetilde{M}(U)$ als die Menge aller

$$s = (s(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})}$$

mit der Eigenschaft: $\forall\ \mathfrak{p} \in U\ \exists$ offene Umgebung V von $\mathfrak{p}$ in U, $f \in S$, $m \in M$ homogen vom selben Grad, so dass für alle $\mathfrak{q} \in V$ gilt: $s(\mathfrak{q}) = \frac{m}{f}$.

Offensichtlich ist $\widetilde{M}$ eine $\mathscr{O}_{\operatorname{Proj} S}$-Modulgarbe und es gilt

4.12 Satz: Es sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter S-Modul, $X = \operatorname{Proj} S$. Dann gilt:

(a) $\forall\, \mathfrak{p} \in X : \widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$.

(b) $\forall\, f \in S_d, d > 0$: $\widetilde{M} \mid D_+(f) \cong (M_{(f)})^{\sim}$ via $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} S_{(f)}$, wobei $M_{(f)} := (M_f)_0$ der $S_{(f)}$-Modul der homogenen Elemente vom Grad Null in M_f ist.

(c) $\widetilde{M}$ ist quasikohärent.

Ist S noethersch und M endlich erzeugt als S-Modul, so ist $\widetilde{M}$ kohärent.

□

4.13 Definition: Sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter S-Modul. Dann definiert man $M(n)$ als den (um n geschifteten) graduierten S-Modul mit

$$M(n)_k = M_{n+k}$$

für all $k \in \mathbb{Z}$. Es sei $X = \operatorname{Proj} S$. Für $n \in \mathbb{Z}$ definiert man die Garbe $\mathscr{O}_X(n)$ als die zu $S(n)$ assoziierte Garbe. Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe, so definiert man $\mathscr{F}(n)$ durch

$$\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (n).$$

4.14 Satz: Es sei S ein graduierter Ring, der von S_1 als S_0-Algebra erzeugt ist. Es sei $X = \operatorname{Proj} S$. Dann gilt:

(a) $\mathscr{O}_X(n)$ ist invertierbare Garbe auf X für alle $n \in \mathbb{Z}$

(b) Es sei M ein graduierter S-Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\widetilde{M}(n) \cong M(n)^{\sim}.$$

Insbesondere ist

$$\mathscr{O}_X(n) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}(m) \cong \mathscr{O}_X(n+m).$$

(c) Es sei T weiterer von T_1 als T_0-Algebra erzeugter graduierter Ring, $Y = \operatorname{Proj} T$. $\varphi : S \to T$ sei Ringhomomorphismus mit $\varphi(S_d) \subset T_d$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Es sei $U = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Proj} T \mid \varphi(S_+) \not\subset \mathfrak{q}\}$ und $f : U \to X$ sei der von φ induzierte Morphismus von Schemata. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} f^*\mathscr{O}_X(n) & = & \mathscr{O}_U(n), \\ f_*(\mathscr{O}_U(n)) & = & (f_*\mathscr{O}_U)(n), \end{array}$$

wobei $\mathscr{O}_U(n) := \mathscr{O}_Y(n) \mid U$.

Beweis: zu (a): Sei $f \in S_1$. Wir zeigen, dass

$$\mathscr{O}_X(n) \mid D_+(f) \text{ frei vom Rang 1 ist.}$$

Nach 4.12(b) ist

$$\mathscr{O}_X(n) \mid D_+(f) = S(n)^{\sim} \mid D_f(f) = (S(n)_{(f)})^{\sim}.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass $S(n)_{(f)}$ ein freier $S_{(f)}$-Modul vom Rang 1 ist. Das ist ganz einfach! f ist ja eine Einheit im Ring S_f und homogen vom Grad 1. Also ist f^n eine Einheit in S_f, homogen vom Grad n. Multiplikation mit f^n ergibt einen $S_{(f)}$-Modulisomorphimsmus

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} = (S_f)_0 & \xrightarrow{\cong} & (S_f)_n = (S(n)_f)_0 = S(n)_{(f)} \\ \cap & & \cap \\ S_f & \xrightarrow[f^n]{} & S_f \end{array}$$

Da nun S von S_1 als S_0-Algebra erzeugt wird, folgt

$$X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f).$$

(Ist $\mathfrak{p} \in X$, so ist $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$, also $S_1 \not\subset \mathfrak{p}$, weil S_1 Erzeugendensystem des Ideals S_+ ist und somit gibt es ein $f \in S_1$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D_+(f)$.)

Damit ist $\mathscr{O}_X(n)$ invertierbar und insbesondere frei vom Rang 1 auf den offenen affinen Mengen $D_+(f)$, $f \in S_1$.

zu (b): Es seien M, N zwei graduierte S-Moduln. Damit ist das Tensorprodukt $M \otimes_S N$ auch in natürlicher Weise graduiert:

$(M \otimes_S N)_q$ wird von den Elementen $x \otimes y$ mit $x \in M_m$, $y \in M_k$, $m + k = q$, als S_0-Modul erzeugt (siehe EGA II, (2.1.2)).

Wir haben einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi : M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \longrightarrow (M \otimes_S N)_{(f)},$$

der von dem kanonischen Isomorphismus

$$M_f \otimes_{S_f} N_f \xrightarrow{\cong} (M \otimes_S N)_f$$

induziert wird:

$$\frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^k} \longmapsto \frac{x \otimes y}{f^{m+k}}, \quad x \in M_m, y \in N_k$$

Wir konstruieren die Umkehrabbildung von φ (siehe EGA II (2.5.13)). Dazu wird grad $f = 1$ ausgenutzt:

$$M \times N \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$$

sei die $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung, die auf $M_m \times N_k$ durch $(x, y) \mapsto \frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^k}$ definiert ist. Dann wird aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$$

induziert.

Sei $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \to M \otimes_S N$ die kanonische Abbildung, deren Kern von den Elementen

$$sx \otimes y - x \otimes sy, \quad x \in M, y \in N, s \in S$$

erzeugt wird, wobei x, y, s homogen gewählt werden können.

$s \in S_d, x \in M_m, y \in N_k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow sx \otimes y - x \otimes sy &\mapsto \frac{sx}{f^{m+d}} \otimes \frac{y}{f^k} - \frac{x}{f^m} \otimes \frac{sy}{f^k + d} \\
&= \frac{s}{f^d}\left(\frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^k} - \frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^n}\right) = 0
\end{aligned}$$

Damit wird ein Homomorphismus (von additiven abelschen Gruppen)

$$M \otimes_S N \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$$

induziert mit $x \otimes y \mapsto \frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^k}$, wenn $x \in M_m$, $y \in N_k$.
Dieser lässt sich fortsetzen zu einem Homomorphismus

$$(M \otimes_S N)_f \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$$

mit $\frac{x \otimes y}{f^l} \mapsto \frac{x}{f^m} \otimes \frac{y}{f^k}$ falls $x \in M_m$, $y \in N_k$. Die Einschränkung auf $(M \otimes_S N)_{(f)}$ ist die gesuchte Umkehrabbildung

$$\psi : (M \otimes_s N)_{(f)} \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$$

von φ.
Es folgt: φ induziert einen $\mathscr{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \widetilde{N} \xrightarrow{\cong} (M \otimes_S N)^{\sim}.$$

Insbesondere ist

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} S(n) = (M \otimes_S S(n))^{\sim}.$$

Aber offensichtlich ist $M \otimes_S S(n) = M(n)$, denn $(M \otimes_S S(n))_k$ wird nach Definition von den Elementen $x \otimes f$ mit $x \in M_n$, $f \in S(n)_l = S_{n+l}$ mit $m + l = k$ aufgespannt als S_0-Modul.
Da nun aber $x \otimes f = fx \otimes 1$ in $M \otimes S(n)$, wird $(M \otimes S(n))_k$ von den Elementen $x \otimes 1$ mit $x \in M_{m+n+l} = M(n)_k$, $m + l = k$, erzeugt.
Die Abbildungen

$$M_{n+k} \longrightarrow (M \otimes_S S(n))_k, \quad x \mapsto x \otimes 1$$

induzieren den Isomorphismus

$$M(n) \xrightarrow[\cong]{} M \otimes_S S(n).$$

Damit gilt

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M(n)}.$$

(b) ist bewiesen.

Es gilt insbesondere

$$\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}, \qquad \text{falls } n > 0$$

und $\mathcal{O}_X - n = \mathcal{O}_X(-1)^{\otimes n}$.

Der Isomorphismus

$$\varphi : \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(0)$$

induziert einen Isomorphismus

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(-1)^*.$$

Damit ist $\mathcal{O}_X(1)$ die duale Garbe zu $\mathcal{O}_X(-1)$.

Wir bemerken noch: Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic}(X), \quad n \mapsto [\mathcal{O}_X(n)]$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ in die multiplikativ geschriebene Gruppe $\operatorname{Pic}(X)$ der Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf X.

zu (c): Analog zum affinen Fall zeigt man für einen graduierten S-Modul M

$$f^*(\widetilde{M}) = (M \otimes_S T)^{\sim} \mid U,$$

wobei $M \otimes_S T$ in natürlicher Weise ein graduierter T-Modul ist.

Für einen graduierten T-Modul N ist

$$f_*(\widetilde{N} \mid U) = ({}_S N)^{\sim}.$$

Da auch $f_*(\mathcal{O}_U) = \widetilde{T}$, wobei T als graduierter S-Modul aufgefasst wird, ist (c) bewiesen. □

4.15 Definition: Es sei $X = \operatorname{Proj} S$ und $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Dann ist $M = \Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ ein graduierter S-Modul.

Zunächst ist M ein graduierter $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$-Modul und via des kanonischen Homomorphismus $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, $S_d \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$, dann auch ein graduierter S-Modul.

Im Fall $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, grad $x_i = 1$, ist die Situation einfach. Es gilt dann

4.16 Satz: Sei A ein Ring. $S = A[x_0,\dots,x_r]$. $X = \mathbb{P}^r_A = \operatorname{Proj} S$. Dann ist die kanonische Abbildung $S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_X)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die kanonische Abbildung

$$\varphi_n : S_n \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$$

ein Isomorphismus ist. Dazu beschreiben wir φ_n in konkreten Termen: Es gilt

$$X = \bigcup_{i=0}^{r} D_+(x_i)$$

und $\mathscr{O}_X(n) \mid D_+(x_i) = (S(n)_{(x_i)})^{\sim}$.
Folglich ist

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) = \{(s_i)_{i=0,\dots,r} \mid s_i \in S(n)_{(x_i)} \text{ und } \forall\, i,j : s_i = s_j \text{ in } S_{x_i x_j}\}$$

Dabei ist in natürlicher Weise $S(n)_{(x_i)} \subset S_{x_i} \subset S_{x_i x_j} \subset S_{x_0,\dots,x_r}$.
Man folgert wegen $S(n)_{(x_i)} = (S_{x_i})_n$

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) = \left(\bigcap_{i=0}^{r} S_{x_i} \right)_n \subset (S_{x_0 \dots x_r})_n .$$

Jedes Element $f \in (S_{x_0 \dots x_r})_n$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$f = x_0^{k_0} \dots, x_r^{k_r} g$$

mit $i_\nu \in \mathbb{Z}$, $g \in S_{n-k_0-\dots-k_r}$, so dass g durch keines der Elemente x_i in S teilbar ist. Ist nun $f \in S_{x_i}$, so muss $k_j \geq 0$ für alle $j \neq i$ gelten. Ist $f \in S_{x_{i_1}} \cap S_{x_{i_2}}$ für zwei Indizes $i_1 \neq i_2$, so gilt also $k_j \geq 0$ für alle j, d.h. $f \in S_n$. Damit ist die Behauptung bewiesen, sogar noch etwas mehr, nämlich:die Einschränkung

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) \longrightarrow \Gamma(D_+(x_0) \cup D_+(x_1), \mathscr{O}_X(n)))$$

ist ein Isomorphismus.
Insbesondere gilt

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = A$$

und somit folgt

$$\pi_* \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A},$$

wobei $\pi : X \to \operatorname{Spec} A$ die von $A \subset A[x_0,\dots,x_r]$ induzierte Projektion ist.

Da weiter für $n > 0$:

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) = S_n$$

freier A-Modul vom Rang $\binom{n+r}{n}$ ist, ist

$$\pi_* \mathscr{O}_X(n) \cong \widetilde{S}_n = \bigoplus_{|\nu|=n} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} x^\nu$$

freie $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A}$-Modulgarbe vom Rang $\binom{n+r}{n}$, wobei $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$ und $x^\nu = x_0^{\nu_0} \ldots x_r^{\nu_r}$.

Wichtig ist auch die Feststellung

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(-n)) = 0 \quad \text{ falls } n > 0.$$

Es gibt also invertierbare Garben, ohne globale Schnitte, d.h. ohne von Null verschiedenen Schnitten.

Ganz anders verhält es sich in der Topologie beziehungsweise der Differentialgeometrie. Dort kann man lokale (C^∞-) Schnitte durch Multiplikation von (C^∞-) Funktionen mit kompaktem Träger im Definitionsbereich U des lokalen Schnittes stets zu einem globalen nichttrivialen Schnitt mit kompakten Träger ‘fortsetzen’.

$\square$

4.17 Satz: Es sei X ein noethersches Schema und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf X.

Es sei $f \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ ein globaler Schnitt und $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ (Man definiert $f(x) := f_x \mod \mathfrak{m}_x \mathscr{L}_x$). Weiter sei $\mathscr{F}$ ein quasikohärente $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe. Dann gilt

(a) Sei $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ und $s \mid X_f = 0$. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass $f^n s = 0$, wobei $f^n S$ als Schnitt in $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ aufgefasst wird.

(b) Sei $t \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass $f^n t$ zu einem Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ fortsetzbar ist.

$\square$

4.18 Satz: Sei S ein graduierter Ring, S sei endliche erzeugt als S_0-Algebra von Elementen aus S_1. Sei $X = \operatorname{Proj} S$, $\mathscr{F}$ quasikohärent auf X. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\beta : \Gamma_*(\mathscr{F})^\sim \longrightarrow \mathscr{F}.$$

Beweis: $\beta : \Gamma_*(\mathscr{F})^\sim \to \mathscr{F}$ wird für Schnitte auf $D_+(f)$, $f \in S_1$, erklärt:

$$\begin{aligned}\beta_f : \Gamma_*(\mathscr{F})_{(f)} = \quad & \Gamma_*(\mathscr{F})^\sim(D_+(f)) \longrightarrow \mathscr{F}(D_+(f)),\\ & \tfrac{m}{f^d} \longmapsto n \otimes f^{-d} \in \Gamma(D_+(f), \mathscr{F}(d) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(-d)),\end{aligned}$$

$m \in \Gamma(X, \mathscr{F}(d))$.
Wir zeigen, dass β_f ein Isomorphismus ist.
Wir fassen f als globalen Schnitt in $\mathscr{L} := \mathscr{O}_X(1)$ auf. Nach 4.17 (a) und (b) gilt

$$\Gamma(D_f(f), \mathscr{F}) \cong \Gamma_*(\mathscr{F})_{(f)}.$$

Damit sind wir schon fertig. □

4.19 Korollar: Sei A ein Ring

(a) Sei $Y \subset \mathbb{P}^r_A$ abgeschlossenes Unterschema. Dann gibt es ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset S$, $S := A[x_0, \ldots, x_r]$, so dass Y das von $\mathfrak{a}$ bestimmte abgeschlossene Unterschema $\operatorname{Proj}(S/\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^r_A$ ist.

(b) Ein A-Schema Y ist projektiv über $A \iff Y \cong \operatorname{Proj} S$, wobei S eine graduierter Ring ist, der von endlich vielen Elementen aus S_1 als S_0-Algebra erzeugt wird, wobei $S_0 = A$.

Beweis: zu (a): Sei $\mathscr{I}_Y \subset \mathscr{O}_X$ die Idealgarbe von Y. Dann folgt $\mathscr{I}_Y(n) \subset \mathscr{O}_X(n)$ für alle n und da Γ links exakt ist, folgt $\Gamma_*(\mathscr{I}_Y) \subset \Gamma_*\mathscr{O}_X = S$; sei $\mathfrak{a} = \Gamma_*(\mathscr{I}_Y)$. Nach 4.18 gilt, da $\mathscr{I}_Y$ quasikohärent ist,

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathscr{I}_Y.$$

□

4.20 Definition: Sei Y ein Schema.
Es sei $g : \mathbb{P}^r_Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ die kanonische Projektion. Man definiert

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_Y/Y}(1) := g^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1)$$

(Ist $Y = \operatorname{Spec} A$, so stimmt das mit der alten Definition überein.)

4.21 Definition: Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Ein invertierbare Garbe $\mathscr{L}$ auf X heißt *sehr ampel relativ* Y, wenn es eine Einbettung $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ mit $f = \pi \circ i$ gibt, so dass

$$\mathscr{L} \cong i^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_Y/Y}(1) \qquad \left[= (g \circ i)^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1)\right]$$

Hier bedeutet π die Projektion $\mathbb{P}^r_Y \to Y$.

(Vgl. EGA II (4.4.2)).

Sei Y noethersch und $f : X \to Y$ eigentlich. Dann gilt: X ist projektiv über $Y \iff \exists\, \mathscr{L}$ invertierbar auf X, $\mathscr{L}$ sehr ampel relativ Y.

4.22 Definition: Sei X ein Schema, $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe. Dann heißt $\mathscr{F}$ von globalen Schnitten erzeugt: $\iff$ $\mathscr{F}$ ist Quotientengarbe einer freien Garbe $\mathscr{O}_X^{\oplus I}$, I Indexmenge.

4.23 Beispiel: (a) Quasikohärente Garben auf affinen Schemata sind von globalen Schnitten erzeugt.

(b) $X = \mathbb{P}^r_A$, $\mathscr{O}_X(1)$ ist von den Schnitten $x_0, \ldots, x_r \in S_1 = \Gamma(X, \mathscr{O}_X(1))$ erzeugt, wobei $S = A[x_0, \ldots, x_r]$.

$$\varphi : \mathscr{O}_X^{\otimes r+1} \to \mathscr{O}_X(1)$$

$\varphi(a_0, \ldots, a_r) = a_0 x_0 + \ldots + a_r x_r$ ist Epimorphismus von $\mathscr{O}_X$-Modulgarben.

Bemerkung: Der Kern von φ ist eine wichtige lokalfreie Garbe auf X, nämlich isomorph zu

$$\Omega^1_X(1)$$

wobei Ω^1_X die Garbe der Pfaffschen Formen auf X (Differentialformen vom Grad 1) ist.

4.24 Theorem: (Serre)

Sei X projektives Schema über dem notherschen Ring A, $\mathscr{O}(1)$ sei eine sehr ample Garbe auf X relativ A. Es sei $\mathscr{F}$ eine kohärente $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ die Garbe $\mathscr{F}(n)$ durch endlich viele globale Schnitte erzeugt ist.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $X = \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_r]$. Dann gilt

$$\mathscr{F} \mid D_+(x_i) \cong \widetilde{M}_i,$$

wobei M_i ein B_i-Modul ist, $B_i = A\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_r}{x_i}\right]$.

Es seien $s_{i1}, \ldots, s_{im} \in M_i$ Erzeuger von M_i.

Dann gibt es ein n, sodass für alle i, j gilt

$$x_i^n s_{ij} \in \Gamma(D_+(x_i), \mathscr{F}(n))$$

ist zu einem Schnitt

$$t_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$$

fortsetzbar. Wir zeigen, dass

$$\varphi : \mathscr{O}_X^{\oplus m(r+1)} \xrightarrow[t_{ij}]{} \mathscr{F}$$

mit $\varphi(a_{ij}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} t_{ij}$ surjektiv ist, wie man am folgenden Diagramm abliest:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{D_+(x_i)}^{\oplus m(r+1)} \arrow[rr, "(t_{ij})_{i,j}"'] & & \mathscr{F}(n) \mid D_+(x_i) \\
\bigcup & & \\
\mathscr{O}_{D_+(x_i)}^{\oplus m} \arrow[rr] & & \mathscr{F} \mid D_+(x_i) \arrow[uu, "\cong"', "x_i^n"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Zum Schluss beweisen wir folgendes wichtige

4.25 Theorem: Es sei K ein Körper, A endlich erzeugte K-Algebra. X sei ein projektives Schema über A, $\mathscr{F}$ kohärent auf X.

Dann gilt:

$$\Gamma(X, \mathscr{F}) \text{ ist endlich erzeugter } A\text{-Modul.}$$

Ist $f : X \to Y$ ein projektiver Morphismus von K-Schemata von endlichem Typ über K, so ist die Bildgarbe $f_*\mathscr{F}$ jeder kohärenten Garbe $\mathscr{F}$ auf X kohärent auf Y.

Beweis: Es sei $X = \operatorname{Proj} S$, $S = A[s_1, \ldots, s_n]$ endlich erzeugt von $s_1, \ldots, s_n$ vom Grad 1. Es sei $M = \Gamma_*(\mathscr{F})$. Nach Satz 4.19 ist

$$\widetilde{M} \cong \mathscr{F}$$

Nach 4.24 gibt es ein n und endlich viele Schnitte $t_1, \ldots, t_s \in \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) = M_n$, die $\mathscr{F}(n)$ erzeugen. Es sei $M' \subset M$ der von $t_1, \ldots, t_s$ erzeugte graduierte S-Untermodul von M.

Dann ist (wie man leicht sieht!)

$$\widetilde{M'} \longrightarrow \widetilde{M} = \mathscr{F}$$

ein Isomorphismus.

Damit ist $\mathscr{F}$ die assoziierte Garbe zu einem endlich erzeugten graduierten S-Modul. Damit gilt es zu zeigen:

Behauptung: Es sei M endlich erzeugter graduierter S-Modul. Dann ist $\Gamma(X, \widetilde{M})$ ein endlich erzeugter A-Modul.

Es sei

$$0 = M^0 \subset M' \subset \ldots \subset M^r = M$$

eine Filtrierung von M durch graduierter S-Untermoduln. Dann ist

$$\Gamma(X, \widetilde{M}) \text{ endlicher } A\text{-Modul,}$$

falls alle

$$\Gamma(X, \widetilde{M^i/M^{i-1}}) \text{ endliche } A\text{-Moduln}$$

sind, wobei $i = 1, \ldots, r$.
Man kann nun die Filtrierung so wählen, dass die Quotienten $Q_i = M^i/M^{i-1}$ einfache graduierte S-Moduln sind, d.h. von der Form

$$(S/\mathfrak{p})(n)$$

mit einem homogenen Primideal $\mathfrak{p} \subset S$.
Damit haben wir alles zurückgeführt auf das folgende Lemma

4.26 Lemma: Sei $X = \operatorname{Proj} S$, S nullteilerfreie graduierte A-Algebra, S von endlich vielen Elementen aus S_1 als A-Algebra erzeugt, $A = S_0$.
Dann gilt für alle $n \geq 0$

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(n)) \text{ ist endlicher } A\text{-Modul.}$$

Beweis: Es sei $S' = \oplus S'_n$, $S'_n = \Gamma(X, \mathscr{O}_X(n))$.
Dann gilt

$$S \subset S' \subset \bigcap_{i=0}^{r} S_{x_i} \subset S_{x_0,\ldots,x_r}$$

wobei $x_0, \ldots, x_r \in S_1$ ein A-Modulerzeugendensystem von S_1 seien, $x_i \neq 0$.
Sei $s' \in S'_d$. Da $s' \in S_{x_i}$, gibt es ein $n > 0$, so dass $x_i^n s' \in S$ für alle i.
Vergrößert man n hinreichend, so folgt

$$S_m s' \subset S_{m+d} \text{ für alle } m \geq n.$$

Es folgt

$$S_n s'^q \subset S \text{ für alle } q > 0.$$

Insbesondere ist $s'^q \in M := \frac{1}{x_0^n} S$.
M ist endlich erzeugter S-Untermodul des Quotientenkörpers von S. Damit ist

$$S[s'] \subset M$$

und somit ist s' ganz über S (Atiyah-Macdonald, Seite 59). Damit liegt s' im ganzen Abschluss $\hat{S}$ von S in seinem Quotientenkörper.
Ein Satz der Algebra sagt:

$$\hat{S} \text{ ist endlich über } S.$$

Wegen $S' \subset \hat{S}$ ist auch S' endlich über S. und somit ist S'_n endlich als A-Modul.

$\square$

Im Rahmen der Kohomologie ergibt sich ein anderer Beweis dieses Satzes.