Topologie I

R. Vogt

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

Topologie ist Stetigkeitsgeometrie, d.h. sie untersucht Eigenschaften geometrischer Gebilde, die unter bijektiven umkehrbar stetigen Abbildung erhalten bleiben. Eine solche Eigenschaft ist etwa, zusammenhängend zu sein, während Längen und Volumina unter allgemeinen stetigen Abbildungen nicht erhalten bleiben.

Ausgehend vom Stetigkeitsbegriff der Analysis wollen wir die Definition eines topologischen Raumes erarbeiten. Wir erinnern:

1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $a \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $|x - a| < \delta$.

Die Menge $\{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < \delta\}$ besteht aus allen Punkten von $\mathbb{R}$, die von a einen Abstand kleiner als δ haben. Sie wird δ-*Umgebung* von a genannt und mit $U_\delta(a)$ bezeichnet. Stetigkeit können wir also definieren, sobald wir einen Abstandsbegriff haben. Mengen, auf denen ein Abstandsbegriff definiert ist, heißen metrische Räume.

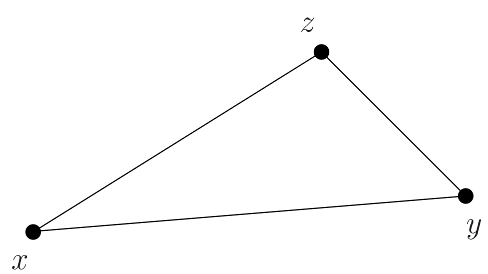
1.2 Definition: Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, genannt *Metrik* oder *Abstandsfunktion*, so dass für $x, y, z \in X$ stets gilt

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Erläuterung: Die drei Axiome geben Bedingungen an, die wir von einem vernünftigen Abstandsbegriff erwarten: Ist der Abstand zweier Punkte Null, so sind die Punkte gleich. Der Abstand von x zu y ist derselbe, wie der von y zu x. Das dritte Axiom, genannt Dreiecksungleichung, ist am besten durch folgendes Bild erklärt:



Eine δ-Umgebung von a ist dann $U_\delta(a) = \{x \in X;\ d(x,a) < \delta\}$
Selbstverständlich kann ein Abstand nur positive Werte haben:

1.3 Ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf X, so gilt $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$. □ □

1.4 Beispiele: (1) Auf $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\}$ benutzt man meist eine der folgenden drei Metriken: Sei $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$

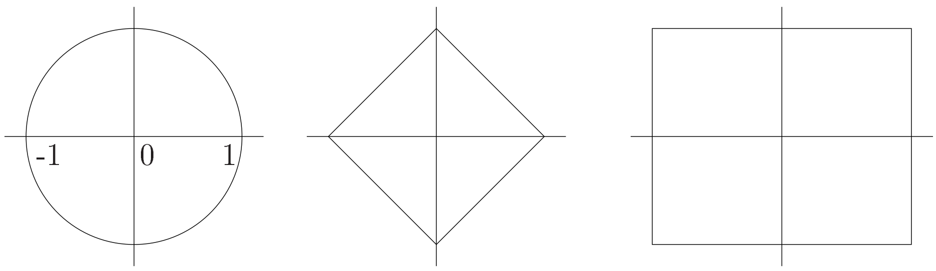
(i) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ (*euklidische Metrik*)

(ii) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ (*L_1-Metrik*)

(iii) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$ (*Maximummetrik*)

Den Nachweis der Axiome überlassen wir dem Leser.

Für $n = 2$ sehen die Umgebungen $U_1(0)$ wie folgt aus



euklidische Metrik L_1-Metrik Maximummetrik

(2) Im Zusammenhang mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen spielt der folgende metrische Raum eine bedeutende Rolle:

Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $B(X, \mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}$$

eine Metrik auf $B(X, \mathbb{R})$.

(3) In der Analysis werden auch folgende metrische Räume behandelt: Sei $C([0,1], \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $p > 0$ aus $\mathbb{N}$. Dann ist

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Metrik auf $C([0,1],\mathbb{R})$.

(4) Auf jeder Menge X kann man die *diskrete Metrik* definieren:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Der Stetigkeitsbegriff (1.1) lässt sich offensichtlich wörtlich auf metrische Räume erweitern.

1.5 Definition: Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ von metrischen Räumen heißt *stetig in* $a \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$d_Y\Big(f(x), f(a)\Big) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x,a) < \delta,$$

d.h. wenn es zu jeder ε-Umgebung V von $f(a)$ in Y eine δ-Umgebung U von a in X gibt, so dass $f(U) \subset V$.
Ist f in jedem $a \in X$ stetig, heißt f *stetig*.
f heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig sind.
Der Homöomorphiebegriff in der Topologie entspricht dem Isomorphiebegriff in der Algebra. Homöomorphe metrische Räume werden also in der Topologie als im wesentlichen gleich betrachtet. Deshalb definiert der Topologe

1.6 Definition: Zwei Metriken d und $\overline{d}$ auf einer Menge X heißen *äquivalent*, wenn die identische Abbildung $id : (X, d) \longrightarrow (X, \overline{d})$ ein Homöomorphismus ist.

1.7 Übung: Zeigen Sie, dass die drei Metriken auf $\mathbb{R}^n$ aus Beispiel 1.4.1 äquivalent sind.

Nach (1.7) können verschiedene Metriken zum selben Stetigkeitsbegriff führen. Dies kann als Hinweis dafür angesehen werden, dass man weniger als eine metrische Struktur für die Definition der Stetigkeit benötigt. Nach Definition 1.5 genügt es in der Tat zu wissen, was eine Umgebung eines Punktes ist. In 1.5 hängen die Umgebungen von einem Parameter ε ab, von dem wir uns zunächst lösen wollen:

1.8 Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von a, wenn es eine ε-Umgebung V von a mit $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $V \subset U$.

Wissen wir für jedes $x \in X$ und $y \in Y$, was eine Umgebung von x bzw. y ist, können wir wie in 1.5 stetige Abbildungen $f : X \to Y$ definieren.

Damit wir für stetige Abbildungen dieses Typs auch Sätze beweisen können, müssen die Umgebungssysteme Axiome erfüllen. Z.B. wird bei dem üblichen Beweis der Stetigkeit der Summe $f+g$ zweier stetiger Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ benutzt, dass der Durchschnitt zweier Umgebungen wieder eine Umgebung ist. Damit sind die ersten drei Axiome der folgenden Definition nahe liegende Forderungen an einen vernünftigen Umgebungsbegriff. Den Wert des vierten Axioms werden wir etwas später einsehen.

1.9 Definition: Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ordnet jedem $x \in X$ eine nicht leere Menge $\mathcal{T}(x)$ von Teilmengen von X zu, so dass gilt

(i) $x \in U \quad \forall\, U \in \mathcal{T}(x)$

(ii) $U \in \mathcal{T}(x)$ und $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{T}(x)$

(iii) $U, V \in \mathcal{T}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}(x)$

(iv) $U \in \mathcal{T}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T}(x)$, so dass $U \in \mathcal{T}(y) \quad \forall y \in V$.

Die Mengen $U \in \mathcal{T}(x)$ heißen *Umgebungen* von x, das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*.

1.10 Beispiele: (1) Auf einem metrischen Raum ist die *kanonische Topologie* durch die Umgebungen im Sinne von (1.8) definiert. Der Nachweis der Axiome ist dem Leser überlassen.

(2) Sei X eine beliebige Menge. Die *diskrete Topologie* $\mathcal{D}$ auf X hat als $\mathcal{D}(x)$ die Menge aller Teilmengen von X, die x enthalten. Bei der *Klumpentopologie* $\mathcal{K}$ auf X besteht $\mathcal{K}(x)$ nur aus der Menge X.

(3) Auf $\mathbb{N}$ definieren wir eine Topologie $\mathcal{T}$ durch: $U \in \mathcal{T}(x)$, falls 0 und x aus U sind.

(4) Sei $(X, <)$ eine total geordnete Menge. Die *Ordnungstopologie* $\mathcal{T}$ auf X hat in $\mathcal{T}(x)$ alle Mengen U mit folgender Eigenschaft: Gibt es ein $a < x$, so gibt es ein a_1, so dass $\{z \in X;\ a_1 < z \leq x\} \subset U$, gibt es ein $b > x$, so gibt es ein b_1, so dass $\{z \in X;\ x \leq z < b_1\} \subset U$.

1.11 Übung: Sind d und $\overline{d}$ äquivalente Metriken auf X, dann sind die zugehörigen kanonischen Topologien dieselben.

Bevor wir stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen betrachten, wollen wir einige wichtige Begriffe einführen, die zum Teil schon aus der Analysis bekannt sind.

1.12 Definition: Eine Menge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *offen*, wenn jedes $a \in A$ eine Umgebung U besitzt, so dass $U \subset A$. Die Menge A heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement offen ist.

1.13 Übung: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie

(i) $\emptyset$ und X sind offen und abgeschlossen

(ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen

(iii) der Durchschnitt zweier (und damit endlich vieler) offener Mengen ist offen

(iv) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

(v) die Vereinigung zweier (und damit endlich vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Geben Sie Beispiele dafür an, dass die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen und der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen nicht offen zu sein braucht.
Offene und abgeschlossene Mengen sind für die Untersuchung topologischer Räume von fundamentaler Bedeutung. In der Tat bestimmt die Angabe der offenen Mengen sogar die Topologie.

1.14 Satz: Sei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie von Teilmengen, so dass gilt

(i) $\emptyset,\ X \in \mathcal{O}$

(ii) beliebige Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{O}$ liegen in $\mathcal{O}$

(iii) der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{O}$ liegt in $\mathcal{O}$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, deren offene Mengen genau die Mengen aus $\mathcal{O}$ sind.

Damit $\mathcal{O}$ die Familie der offenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$ ist, sind nach (1.13) die drei Bedingungen aus (1.14) notwendig.
Zum Beweis zunächst drei Beobachtungen

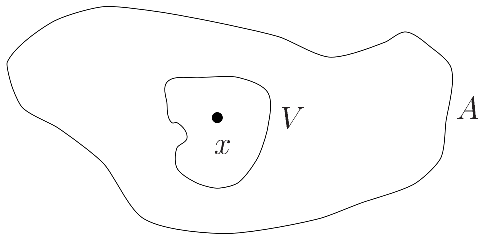
1.15 (i) Eine offene Menge ist Umgebung eines jeden ihrer Punkte

(ii) $U \in \mathcal{T}(x) \Leftrightarrow \exists$ offene Menge A mit $x \in A \subset U$

(iii) $\mathring{A} = \{x \in A;\ A \in \mathcal{T}(x)\}$, genannt das *Innere* oder der *Kern* von $A \subset X$, ist offen.

Beweis: (i) folgt direkt aus der Definition (1.12)

(iii) Hier benötigen wir das Axiom 1.9.4. Sei $x \in \mathring{A}$. Dann ist A Umgebung von x.



Also gibt es eine Umgebung V von x, so dass $A \in \mathcal{T}(y)$ für alle $y \in V$. D.h. $y \in \mathring{A}$ für alle $y \in V$. Also liegt die Umgebung V von x ganz in $\mathring{A}$.

(ii) $U \in \mathcal{T}(x)$. Dann ist $\mathring{U}$ offen und $x \in \mathring{U}$. Also $x \in \mathring{U} \subset U$. Sei umgekehrt A eine offene Menge mit $x \in A \subset U$, dann ist A Umgebung von x nach (i) und U Umgebung von x nach 1.9 (ii). $\square$

Beweis 1.14: Für die gesuchte Topologie $\mathcal{T}$ auf X muss nach 1.15 (ii) gelten

$$\mathcal{T}(x) = \{U \subset X;\ \exists A \in \mathcal{O} \text{ mit } x \in A \subset U\}.$$

Die Eindeutigkeit von $\mathcal{T}$ ist damit klar. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie und $\mathcal{O}$ die Familie der zugehörigen offenen Mengen ist.

$X \in \mathcal{O}$, also ist $\mathcal{T}(x) \neq \emptyset$. Die Axiome 1.9 (i) und (ii) sind offensichtlich erfüllt. Sind nun $U, W \in \mathcal{T}(x)$, dann gibt es $A, B \in \mathcal{O}$ mit $x \in A \subset U$ und $x \in B \subset W$. Es folgt $x \in A \cap B \subset U \cap W$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{O}$, also $U \cap W \in \mathcal{T}(x)$. Für Axiom (iv) nehme $V = A$.

Sei nun $A \in \mathcal{O}$ und $x \in A$. Da $A \in \mathcal{T}(x)$, ist A eine Umgebung von x, die in A liegt, also ist A offen. Sei umgekehrt B eine offene Menge von $(X, \mathcal{T})$ dann gibt es zu jedem $b \in B$ ein $A_b \in \mathcal{O}$ mit $b \in A_b \subset B$. Also ist $B = \bigcup\limits_{b \in B} A_b$. Nach Voraussetzung (ii) ist $B \in \mathcal{O}$. $\square$

1.16 Bemerkung: Wir werden ab jetzt fast immer Topologien durch Angabe ihrer offenen Mengen festlegen.

Jetzt noch einige Bemerkungen zum Begriff des Kerns und des dazu komplementären Begriffs, der Hülle

1.17 Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$

(i) Die Punkte aus $\mathring{A}$ heißen *innere Punkte* von A

(ii) $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* von A, falls für jede Umgebung U von x gilt: $U \cap A = \emptyset$. Die *Hülle* oder der *Abschluss* $\overline{A}$ von A ist die Menge der Berührungspunkte von A

(iii) $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von A, wenn für jede Umgebung U von x gilt: $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

(iv) $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A, wenn für jede Umgebung U von x gilt

$$U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X - A) \neq \emptyset$$

1.18 Übung: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und A, B Teilmengen von X

(1) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h.

$$\overline{A} = \bigcap \{C \subset X;\ C \text{ abgeschlossen, } A \subset C\}$$

(2) Es gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(3) $\mathring{A}$ ist die größte in A enthaltene offene Menge, d.h.

$$\mathring{A} = \bigcup \{C \subset X;\ C \text{ offen, } C \subset A\}$$

(4) Es gilt $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ und $(A \cup B)^\circ \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Wenden wir uns nun Abbildungen topologischer Räume zu. Die Definition der Stetigkeit haben wir uns bereits erarbeitet:

1.19 Definition: Seien $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologische Räume. Eine Abbildung $f := X \to Y$ heißt *stetig in* $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f(U) \subset V$.
f heißt *stetig*, falls es in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. Ist f bijektiv und sind f und ihre Umkehrfunktion f^{-1} stetig, nennt man f einen *Homöomorphismus*. Wir schreiben dann $(X, \mathcal{S}) \cong (Y, \mathcal{T})$.

1.20 Beispiele: (1) Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist die identische Abbildung $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

(2) Jede konstante Abbildung $(X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$ von topologischen Räumen ist stetig.

(3) Ist $\mathcal{D}$ die diskrete Topologie auf X und $(Y,\mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum, dann ist jede Abbildung $f:(X,\mathcal{D})\to(Y,\mathcal{T})$ stetig.

(4) Ist $\mathcal{K}$ die Klumpentopologie auf Y und $(X,\mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum, dann ist jede Abbildung $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{K})$ stetig.

1.21 Konvention: Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, schreiben wir für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ kurz X und nennen ihn kurz Raum.

1.22 Satz: Sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Abbildungen von Räumen, f stetig in $x\in X$ und g stetig in $y=f(x)\in Y$, dann ist $g\circ f$ stetig in x.

Beweis: Sei W Umgebung von $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g(y)$. Da g in y stetig ist, gibt es eine Umgebung V von y, so dass $g(V)\subset W$. Da f in x stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f(U)\subset V$. Es folgt

$$(g\circ f)(U)=g\big(f(U)\big)\subset g(V)\subset W$$

$\square$

Das nächste Resultat gibt eine Reihe nützlicher Kriterien für die globale Stetigkeit einer Abbildung an.

1.23 Satz: Für eine Abbildung $f:X\to Y$ von topologischen Räumen sind äquivalent:

(1) f ist stetig

(2) $B\subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ offen

(3) $B\subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen

(4) $A\subset X$ beliebig $\Rightarrow f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

(5) $B\subset Y$ beliebig $\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$

(6) $B\subset Y$ beliebig $\Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{B})\subset\big(f^{-1}(B)\big)^{\circ}$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (4): Sei $x\in\overline{A}$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U)\subset V$. Da $x\in\overline{A}$, ist $U\cap A\neq\emptyset$. Es folgt: $\emptyset\neq f(U\cap A)\subset f(U)\cap f(A)\subset V\cap f(A)$. Also ist $f(x)$ Berührungspunkt von $f(A)$, so dass $f(x)\in\overline{f(A)}$
(4) $\Rightarrow$ (5) Sei $A=f^{-1}(B)$. Dann gilt nach (4) $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{B}$. Also

$$\overline{f^{-1}(B)}=\overline{A}\subset f^{-1}f(\overline{A})\subset f^{-1}(\overline{B})$$

(5) $\Rightarrow$ (3) Sei $B \subset Y$ abgeschlossen. Nach (5) gilt

$$f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

Also ist $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ und somit abgeschlossen.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sei $B \subset Y$ offen. Dann ist $Y - B$ abgeschlossen und $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(B)$ offen.

(2) $\Rightarrow$ (6) $\mathring{B}$ und damit $f^{-1}(\mathring{B})$ sind offen. Da $f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)$, folgt (6) aus (1.18.3).

(6) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X$ und V Umgebung von $f(x)$. Nach (1.15.2) ist $f(x) \in \mathring{V}$. Nach (6) gilt $x \in f^{-1}(\mathring{V}) \subset \big(f^{-1}(V)\big)^\circ$. Insbesondere ist $U = \big(f^{-1}(V)\big)^\circ$ eine Umgebung von x und $f(U) \subset f\big(f^{-1}(V)\big) \subset V$. $\square$

2 Initiale und terminale Topologien

Initiale Topologien auf einer Menge X sind so definiert, dass möglichst viele Abbildungen von X in einen anderen Raum stetig sind, wobei vorgegebene zusätzliche Bedingungen erfüllt sein müssen. Gibt es keine solche Bedingung, tut die diskrete Topologie nach (1.20.3) das Gewünschte. Bei terminalen Topologien sollen möglichst viele Abbildungen nach X stetig sein. Liegen keine Zusatzbedingungen vor, ist die Klumpentopologie die Lösung.

Je mehr offene Mengen X besitzt, um so mehr Abbildung aus X heraus sind stetig, je weniger offene Mengen es besitzt, um so mehr Abbildungen nach X sind stetig (vergl. (1.23)). Die Überlegung führt zu folgender Definition:

2.1 Definition: Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ die Familien offener Mengen zweier Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf X. Wir sagen $\mathcal{T}_1$ ist *feiner* als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, d.h. $\mathcal{T}_1$ hat "mehr" offene Mengen als $\mathcal{T}_2$. Wir nennen dann $\mathcal{T}_2$ *gröber* als $\mathcal{T}_1$.

2.2 Satz und Definition: Sei X eine Menge, $\{X_j;\ j \in J\}$ eine Menge topologischer Räume und $\{f_j : X_j \to X;\ j \in J\}$ eine Menge von Abbildungen. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigenschaften:

(1) $f_j : X_j \to X$ ist stetig für alle $j \in J$

(2) Ist Y ein Raum, dann ist eine Abbildung $g : X \to Y$ genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $g \circ f_j,\ j \in J$, stetig sind.

Diese Topologie heißt *initiale Topologie* bzgl. der f_j und ist die feinste Topologie auf X, für die (2.2.1) erfüllt ist.

Beweis: Damit alle f_j stetig sind, muss gelten: Ist U offen in X, dann ist $f_j^{-1}(U)$ offen in X_j für jedes $j \in J$. Da wir die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft haben wollen, machen wir den Ansatz

$$U \subset X \text{ offen } \iff f_j^{-1}(U) \text{ ist offen in } X_j \text{ für alle } j \in J.$$

Die Bedingungen des Satzes 1.14 sind leicht nachgeprüft, so dass dadurch tatsächlich eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X definiert ist.

Nach Definition von $\mathcal{T}$ sind alle $f_j : X_j \to X$ stetig. Ist nun $g : X \to Y$ eine stetige Abbildung, dann sind auch die Kompositionen $g \circ f_j$ stetig. Sind umgekehrt alle Kompositionen $g \circ f_j$ stetig und ist $V \subset Y$ offen, dann ist $g^{-1}(V)$ offen in X, da $f_j^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_j)^{-1}(V)$ offen in X_j ist für alle $j \in J$. Also ist g stetig. Es bleibt noch die Eindeutigkeit von $\mathcal{T}$ zu zeigen: Sei $\mathcal{S}$ eine weitere Topologie auf X, die den Bedingungen (1) und (2) genügt.

Indem wir für Y einmal $(X, \mathcal{T})$ und einmal $(X, \mathcal{S})$ nehmen, sehen wir aus Bedingung (2), dass

$$id : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{S}) \quad \text{und} \quad id : (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

beide stetig sind. Also haben beide Räume dieselben offenen Mengen und damit dieselbe Topologie. $\square$

Die für uns wichtigsten Spezialfälle sind

2.3 Definition: Ist X ein topologischer Raum und $p : X \to Y$ eine surjektive Abbildung auf eine Menge Y. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ auf Y bzgl. p heißt *Quotiententopologie* auf Y, $(Y, \mathcal{T})$ heißt *Quotientenraum* von X bzgl. p und die stetige Abbildung $p : X \to Y$ heißt *Identifizierung*.

Man stellt sich Y auf X dadurch gewonnen vor, dass man alle Punkte $x \in p^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ miteinander zu einem Punkt verklebt.

2.4 Übungsbeispiele:

(1) Sei $A \subset X, X$ ein Raum. Sei X/A der Raum mit der Quotiententopologie, der aus X dadurch entsteht, dass A zu einem Punkt identifiziert wird. Sei $p : X \to X/A$ die Projektion. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \{f : X/A \to Y \text{ stetig }\} &\longrightarrow \{g : X \to Y;\ g \text{ stetig, } g(A) \text{ ist ein Punkt}\} \\ f &\longmapsto f \circ p \end{aligned}$$

ist bijektiv.

(2) Sei I^n der n-dimensionale Einheitswürfel und ∂I^n sein Rand. Zeigen Sie: $I^n/\partial I^n$ ist homöomorph zur Einheitssphäre S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.5 Für eine surjektive Abbildung $p : X \to Y$ sind nach (2.2) äquivalent:

(1) p ist eine Identifizierung

(2) $g : Y \to Z$ ist stetig $\Longleftrightarrow$ $g \circ p : X \to Z$ ist stetig

(3) $V \subset Y$ ist offen $\Longleftrightarrow$ $p^{-1}(V) \subset X$ ist offen

2.6 Übung: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn mit $A \subset X$ auch $f(A) \subset Y$ offen (bzw. abgeschlossen) ist. Zeigen Sie: Eine stetige surjektive offene (bzw. abgeschlossene) Abbildung ist eine Identifizierung.

2.7 Definition: Sei $(X_i;\ i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und X ihre disjunkte Vereinigung. Die *Summentopologie* auf X ist die initiale Topologie bzgl. der Familie der Inklusionen $j_i : X_i \subset X$. Die Menge X mit der Summentopologie heißt *topologische Summe* der X_i.

2.8 Nach (2.2) sind äquivalent:

(1) X ist topologische Summe der $X_i,\ i \in I$

(2) $f : X \to Y$ ist stetig $\iff f|X_i$ ist stetig für alle $i \in I$.

Terminale Topologien bilden das Gegenstück zu Initialen. Sie haben "duale" Eigenschaften. Genauer bedeutet das, dass man ihre universelle Beschreibung aus (2.2) dadurch erhält, dass man die Abbildungspfeile alle umdreht:

2.9 Satz und Definition: Sei X eine Menge und $\{f_j : X \to X_j,\ i \in J\}$ eine Menge von Abbildungen von X in topologische Räume X_j. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgenden Eigenschaften:

(1) $f_j : X \to X_j$ ist stetig für alle $j \in J$

(2) Ist Y ein Raum, dann ist eine Abbildung $g : Y \to X$ genau dann stetig, wenn alle Kompositionen $f_j \circ g,\ j \in J$ stetig sind.

Diese Topologie heißt *terminale* Topologie bzgl. der f_j und ist die gröbste Topologie auf X, für die (2.9.1) erfüllt ist.

Beweis: Damit alle f_j stetig sind, muss gelten: Ist $U \subset X_j$ offen in X_j, dann ist $f_j^{-1}(U)$ offen in X. Wir suchen also die gröbste Topologie auf X, für die jedes $f_j^{-1}(U),\ U \subset X_j$ offen, $j \in J$, offen ist. Leider genügt die Familie dieser Mengen nicht den Bedingungen (1.14), so dass Sonderbetrachtungen nötig sind: $\square$

2.10 Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{S}$ offener Teilmengen von X heißt *Subbasis* von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie auf X ist, für die die Mengen aus $\mathcal{S}$ offen sind. Eine Familie $\mathcal{B}$ offener Teilmengen heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, falls jede offene Menge U Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Hierbei verstehen wir die leere Menge als leere Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

2.11 Lemma: Sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen von X. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{S_1 \cap \cdots \cap S_n;\quad n \in \mathbb{N},\ S_i \in \mathcal{S}\}\\ \mathcal{O} &= \left\{\textstyle\bigcup_{i \in I} B_i;\quad I \text{ beliebige Indexmenge},\ B_i \in \mathcal{B}\right\} \cup \{\emptyset, X\}\end{aligned}$$

Dann genügt $\mathcal{O}$ den Bedingungen (1.14). Die zugehörige Topologie $\mathcal{T}$ hat $\mathcal{S}$ als Subbasis und $\mathcal{B}$ als Basis.

Beweis: Sei $\widehat{\mathcal{O}}$ die Menge der offenen Teilmengen der gröbsten Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält. Wegen Bedingung (1.14 (iii)) ist $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{O}}$, und wegen (1.14 (ii)) ist dann auch $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$. Man prüft nun leicht nach, dass $\mathcal{O}$ den Bedingungen (1.14) genügt. Es folgt: $\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}$. □

2.12 Übung: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung von Räumen und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y, so ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(V)$ für alle $V \in \mathcal{S}$ offen ist.

Fortsetzung des Beweises 2.9: Wir wissen, dass

$$\mathcal{S} = \{f_j^{-1}(U);\ j \in J, U \text{ offen in } X_j\}$$

aus offenen Teilmengen von X bestehen muss. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie, die $\mathcal{S}$ als Subbasis hat. Dann sind alle $f_j : X \to X_j$ stetig.

Ist nun $g : Y \to X$ stetig, dann sind natürlich alle $f_j \circ g,\ j \in J$ stetig. Seien umgekehrt alle $f_j \circ g$ stetig. Ist $V = f_k^{-1}(U) \in \mathcal{S}$, wobei $U \subset X_k$ offen ist, so ist $g^{-1}(V) = g^{-1}(f_k^{-1}(U)) = (f_k \circ g)^{-1}(U)$ offen, und damit g nach (2.12) stetig.

Die Eindeutigkeit der Topologie in (2.9) beweist man wie in (2.2). □

Wenden wir uns wieder den wichtigsten Spezialfällen zu.

2.13 Definition: Sei X ein topologischer Raum und $i : Y \to X$ eine injektive Abbildung. Ist $\mathcal{T}$ die terminale Topologie auf Y bzgl. i, heißt i eine *Einbettung*. Ist Y Teilmenge von X und i die Inklusion, nennt man $\mathcal{T}$ die *Spur-* oder *Teilraumtopologie* von Y bzgl. X.

Direkt aus 2.9 erhält man

2.14 Für eine injektive Abbildung $i : Y \to X$ sind äquivalent

(1) i ist Einbettung

(2) $g : Z \to Y$ ist stetig $\Longleftrightarrow i \circ g : Z \to X$ ist stetig

(3) $U \subset Y$ offen $\Longleftrightarrow \exists V \subset X$ offen, so dass $U = i^{-1}(V)$

3.* Ist i die Inklusion einer Teilmenge, nimmt (3) folgende Form an: $U \subset Y$ offen $\Longleftrightarrow \exists V \subset X$ offen, so dass $U = V \cap Y$

2.15 Definition: Sei $(X_i; i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$. Die *Produkttopologie* auf X ist die terminale Topologie auf X bzgl. der Familie der Projektionen $p_i : X \to X_i$. Die Menge X mit der Produkttopologie heißt *topologisches Produkt* der X_i.

2.16 Nach (2.9) sind äquivalent

(1) $X = \prod_{i \in I} X_i$ besitzt die Produkttopologie

(2) $g : Z \to X$ ist stetig $\Longleftrightarrow$ $p_i \circ g$ ist stetig $\forall i \in I$

Um sich mit den Begriffen vertraut zu machen, sollte der Leser verifizieren.

2.17 (1) Sei $A \subset X$ mit der Spurtopologie versehen. Ist $U \subset A$ offen (bzw. abgeschlossen) in der Spurtopologie und A offen (bzw. abgeschlossen) in X, dann ist U offen (bzw. abgeschlossen) in X.

(2) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ topologisches Produkt und $U \subset X$ eine offene Menge. Ist $(x_i) \in U$, dann gibt es endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_k$ und offene Umgebungen V_{i_j} von x_{i_j} in X_{i_j}, $j = 1, \ldots, k$, so dass mit $V_i = X_i$ für $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt $\prod_{i \in I} V_i \subset U$.

2.18 Übung: (1) $i : Y \to X$ ist Einbettung $\Longleftrightarrow$ $i : Y \to i(Y)$ ist ein Homöomorphismus, falls $i(Y)$ die Spurtopologie von X hat.

(2) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} d : (X \times Y) \times (X \times Y) &\to \mathbb{R}, \\ &((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} \end{aligned}$$

ist ein metrischer Raum, dessen kanonische Topologie die Produkttopologie der kanonischen Topologien von (X, d_X) und (Y, d_Y) ist.

(3) Sei $X \times Y$ das topologische Produkt von X und Y und $p : X \times Y \to X$ die Projektion. Zeigen Sie: p ist offen. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass p nicht abgeschlossen zu sein braucht.

3 Zusammenhang

3.1 Definition: Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht homöomorph zur topologischen Summe zweier nicht-leerer Räume ist. Eine Teilmenge A von X heißt *zusammenhängend*, wenn A als Teilraum zusammenhängend ist.

Wir übersetzen die Definition in eine für Beweise günstigere Form:

3.2 Satz: Für eine Teilmenge A eine Raumes X sind äquivalent

(1) A ist zusammenhängend.

(2) Sind U, V offen in X, $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \cap V = \emptyset$, so folgt $A \cap U = \emptyset$ oder $A \cap V = \emptyset$.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sind die Voraussetzungen an U und V erfüllt, so ist A als Teilraum die topologische Summe von $U \cap A$ und $V \cap A$. Also folgt $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen A wäre die topologische Summe von Y und Z. Dann sind Y und Z offen in A, d.h. es gibt offene Mengen U, V in X mit $U \cap A = Y$ und $V \cap A = Z$. Es folgt $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = Y \cap Z = \emptyset$. Also folgt $Y = U \cap A = \emptyset$ oder $Z = V \cap A = \emptyset$, d.h. A ist zusammenhängend. $\square$

3.3 Beispiele: Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, die mehr als einen Punkt enthalten, Intervalle sind.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Resultate über zusammenhängende Mengen zusammen.

3.4 Satz: (1) Ist $A \subset X$ zusammenhängend und $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend

(2) Sind $A_i \subset X$, $i \in I$, zusammenhängend mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

(3) Ist X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig, dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis: (1) Sei $B \subset U \cup V$ mit U, V offen in X und $B \cap U \cap V = \emptyset$. Da $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \cap V = \emptyset$, ist $A \cap U = \emptyset$ oder $A \cap V = \emptyset$, weil A zusammenhängend ist, etwa $A \cap V = \emptyset$. Dann ist $A \subset X \backslash V$. Da $X \backslash V$ abgeschlossen ist, ist $B \subset \overline{A} \subset X \backslash V$. Also $B \cap V = \emptyset$.

(2) Sei $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset U \cup V$ mit U, V offen in X und $A \cap U \cap V = \emptyset$. Sei $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ o. b. d. A. in U. Dann ist $A_i \cap U \neq \emptyset \ \forall i \in I$. Da A_i zusammenhängend ist, folgt $A_i \cap V = \emptyset \ \forall i \in I$, also $\bigcup_{i \in I} A_i \cap V = \emptyset$.

(3) Sei $f(X) \subset U \cup V$ mit U, V offen, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ und $X \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(f(X) \cap U \cap V) = \emptyset$. Da X zusammenhängend ist, ist etwa $f^{-1}(U) = \emptyset$, also $f(X) \cap U = \emptyset$. □

Aus (3.4.3) und (3.3) folgt

3.5 Zwischenwertsatz: Sei X zusammenhängend und $X \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a < b$ im Bild von f. Dann ist $[a, b]$ im Bild von f.

Wir werden später eine stärkere Bedingung als den Zusammenhang benötigen.

3.6 Definition: Ein Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung (= Weg) $w : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$ gibt.

3.7 Satz: Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Die Umkehrung braucht nicht zu gelten.

Beweis: Der erste Teil folgt aus (3.3) und (3.4). Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, dass

$$X = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist. □

3.8 Definition: Sei X ein Raum und $x \in X$. Die *Zusammenhangskomponente* $C(x)$ von x ist die Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen von X, die x enthalten.

3.9 Satz: (1) $C(x)$ ist zusammenhängend und abgeschlossen.

(2) Für $x \neq y$ ist $C(x) = C(y)$ oder $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

Beweis: (1) $C(x)$ ist nach (3.4.2) zusammenhängend. Da $\overline{C(x)}$ nach (3.4.1) zusammenhängend ist, folgt $\overline{C(x)} = C(x)$.

(2) Angenommen $z \in C(x) \cap C(y)$. Dann ist $C(x) \cup C(y)$ zusammenhängend. Aus der Definition folgt $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$. □

4 Die Trennungsaxiome

Wir erinnern zunächst an den Konvergenzbegriff aus der Analysis.

4.1 Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Raum X *konvergiert gegen* $z \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von z ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U\ \forall n \geq n_0$. Wir nennen dann z einen *Grenzwert* von (x_n).

In allgemeinen topologischen Räumen kann eine Folge durchaus mehrere Grenzwerte haben.

4.2 Beispiele: Sei $\mathbb{N}$ mit der Topologie (1.10.3) versehen. Dann ist jedes $z \in \mathbb{N}$ Grenzwert der konstanten Folge $(x_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solche Pathologien sollen geeignete Trennungsaxiome verhindern.

4.3 Definition: Zwei Teilmengen A und B eines Raumes X lassen sich *trennen*, wenn es disjunktive offene Mengen U, V gibt, so dass $A \subset U$ und $B \subset V$.

4.4 Definition: Ein Raum X genügt dem *Trennungaxiom*
T_1, wenn $\{x\}$ abgeschlossen ist $\forall x \in X$.
T_2, wenn sich $\{x\}$ und $\{y\}$ für $x \neq y$ trennen lassen.
T_3, wenn sich jede abgeschlossene Menge A und jede Menge $\{x\}$ mit $x \notin A$ trennen lassen.
T_4, wenn sich je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B trennen lassen.
Ein T_2-Raum heißt *Hausdorffraum*. Ein Raum heißt *regulär*, wenn er T_1 und T_3 erfüllt, und *normal*, wenn er T_1 und T_4 erfüllt.

4.5 Direkt aus den Axiomen folgt: Normal $\Rightarrow$ Regulär $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Die Umkehrungen brauchen nicht zu gelten.

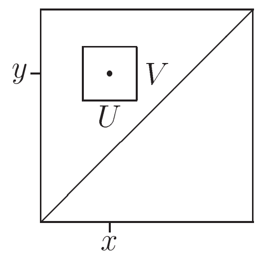
4.6 Beispiele: (1) $\mathbb{N}$ mit der Topologie aus (1.10.3) ist kein T_1 Raum: $\{0\}$ ist offen und nicht abgeschlossen.
(2) Die Menge $\mathbb{R} \sqcup \{\overline{0}\}$ sei wie folgt topologisiert: U ist Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, falls es ein $r > 0$ gibt, so dass $]x-r, x+r[\subset U$, V ist Umgebung von $\overline{0}$, falls es ein $r > 0$ gibt, so dass $\overline{0} \cup \{y \in \mathbb{R};\ 0 < |y| < r\} \subset V$. Dann ist $\mathbb{R}R \sqcup \{\overline{0}\}$ T_1-Raum, aber 0 und $\overline{0}$ lassen sich nicht trennen.
(3) $\mathbb{R}_+$ sei wie folgt topologisiert: Sei $D = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}N \backslash \{0\}\}$. U ist Umgebung von $x \in \mathbb{R}_+$, wenn es ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ gibt, so dass $x \in I \subset U$ oder $x \in (I \backslash D) \cap \mathbb{R}_+ \subset U$. Dieser Raum erfüllt T_2, aber nicht T_3, denn D ist abgeschlossen und lässt sich nicht von 0 trennen.

Um sich die Begriffe anzueignen, beweise man

4.7 Übung: Ist X eine T_i-Raum, $i = 1, 2, 3$, dann auch jeder Teilraum von X (Für T_4-Räume ist das falsch).

4.8 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_2-Raum, wenn die Diagonale $\triangle = \{(x, x); x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis: $X \times X \backslash \triangle$ ist in der Produkttopologie genau dann offen, wenn es zu $(x, y) \in X \times X \backslash \triangle$, d.h. für $x \neq y$, offene Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $U \times V \subset X \times X \backslash \triangle$, d.h. $U \cup V = \emptyset$. $\square$



Dieses Resultat hat eine interessante Folgerung, die ein bekanntes Ergebnis aus der Analysis verallgemeinert.

4.9 Definition: Eine Teilmenge A eines Raumes X heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$

4.10 Satz: Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen eines Raumes in einen Hausdorffraum. Dann gilt

(1) Der Graph von f, $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

(2) $A = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.

(3) $D \subset X$ dicht und $f|D = g|D \Rightarrow f = g$

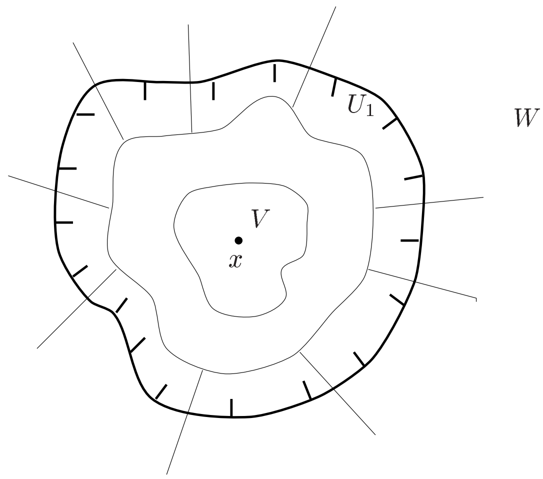
Beweis: (1) Die Abbildung $h : X \times Y \to Y \times Y,\ h(x, y) = (f(x), y)$ ist nach (2.16) stetig, und $G = h^{-1}(\triangle)$.
(2) Die Abbildung $h : X \to Y \times Y,\ h(x) = (f(x), g(x))$ ist nach (2.16)stetig, und $A = h^{-1}(\triangle)$.
(3) $D \subset A$, also $X = \overline{D} \subset \overline{A} = A$. $\square$

Wir zeigen nun andere wichtige Charakterisierungen von T_3- und T_4-Räumen.

4.11 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_3, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine offene Menge V gibt, so daß

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

Beweis: Sei X T_3-Raum und U Umgebung von x. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von x. Da sich $X \backslash U_1$ und x trennen lassen, gibt es offene Mengen V und W, so daß $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$, $X \backslash U_1 \subset W$. Da $V \subset X \backslash W$, ist $\overline{V} \subset \overline{X \backslash W} = X \backslash W \subset U_1 \subset U$.
Der Beweis der Rückrichtung ist trivial. $\square$



Ähnlich beweist man

4.12 Satz: Ein Raum X ist genau dann T_4, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge U mit $A \subset U$ eine offene Menge V gibt, so daß $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. $\square$

Als Anwendung zeigen wir

4.13 Satz: Sei X das topologische Produkt nicht-leerer Räume X_j, $j \in J$. Dann ist X genau dann T_i-Raum, $i = 1, 2, 3$, wenn jedes X_j T_i-Raum ist (für T_4-Räume ist das falsch).

Beweis: X erfülle T_i. Wähle in jedem X_j einen Punkt z_j. Dann ist

$$X_k \longrightarrow X, \; x \longmapsto (y_j)_{j \in J} \text{ mit } y_j = \begin{cases} x & j = k \\ z_j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Einbettung. Nach (4.7) ist X_k ein T_i-Raum.
Die Umkehrung beweisen wir exemplarisch für T_3-Räume. Sei $x = (x_j)_{j \in J} \in X$ und U eine Umgebung von x. Nach (2.17) gibt es eine Menge $\prod_{j \in J} W_j \subset U$, wobei W_j Umgebung von x_j und nur endlich viele W_j, etwa für $j_1, \ldots, j_k$, von X_j verschieden sind. Da alle X_j T_3-Räume sind, gibt es offene Mengen V_{j_r}, so daß $x_{j_r} \subset V_{j_r} \subset \overline{V}_{j_r} \subset W_{j_r}$, $r = 1, \ldots, k$. Setze $V_j = X_j$ für $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ und $V = \prod_{j \in J} V_j$. Dann ist V offen und $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. $\square$
Die folgenden wichtigen Sätze charakterisieren T_4-Räume durch Abbildungen:

4.14 Satz: Erweiterungssatz von Tietze: Für einen Raum X sind äquivalent

(1) X ist T_4.

(2) Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to [0,1]$ stetig, dann gibt es eine stetige Erweiterung $F : X \to [0,1]$ von f, d.h. $F|A = f$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Seien B und C disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Die Abbildung

$$f : B \cup C \to [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \in C \end{cases}$$

ist stetig und besitzt somit eine stetige Erweiterung F. Dann trennen die offenen Mengen $F^{-1}([0,\frac{1}{3}[)$ und $F^{-1}(]\frac{2}{3},1])$ die Mengen B und C.
(1) $\Rightarrow$ (2): Wir setzen

$$\begin{array}{ll} A_r = \{x \in A;\ f(x) \le r\} & r \in \mathbb{Q} \\ U_s = X \backslash \{x \in A;\ f(x) \ge s\} & s \in \mathbb{Q} \cap \,]0,1[\end{array}$$

Bekanntlich ist die Menge $P = \{(r,s) \in \mathbb{Q}^2; 0 \le r < s < 1\}$ abzählbar, d.h. wir können P durchnummerieren:

$$P = \{(r_n, s_n);\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir konstruieren nun induktiv abgeschlossene Mengen $H_n, n \in \mathbb{N}$, so daß

(1) $A_{r_n} \subset \overset{\circ}{H}_n \subset H_n \subset U_{s_n}$

(2) $H_j \subset \overset{\circ}{H}_k$, falls $j,k \le n$ **und** $r_j < r_k,\ s_j < s_k$.

Da $s_0 > r_0$, ist $A_{r_0} \subset U_{s_0}$. Da A_{r_0} abgeschlossen und U_{s_0} offen ist, gibt es H_0 nach (4.12).
Angenommen $H_0, \ldots, H_{n-1}$ sind konstruiert. Sei

$$J = \{j < n;\ r_j < r_n,\ s_j < s_n\} \qquad K = \{k < n;\ r_n < r_k,\ s_n < s_k\}.$$

Da $A_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} H_j$ abgeschlossen, $U_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} \overset{\circ}{H}_k$ offen und

$$A_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} H_j \subset U_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} \overset{\circ}{H}_k,$$

gibt es nach (4.12) eine abgeschlossene Menge H_n, so daß

$$A_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} H_j \subset \overset{\circ}{H}_n \subset H_n \subset U_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} \overset{\circ}{H}_k\ .$$

Damit erfüllt auch H_n die Bedingungen (1) und (2).
Wir vergessen jetzt wieder die Nummerierung von P und setzen für

$$(r,s) \in P \qquad H_{rs} = H_n \qquad \text{falls } (r,s) = (r_n, s_n)$$

Damit haben wir eine Familie $\{H_{rs}; (r,s) \in P\}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, so daß gilt

(3) $A_r \subset \overset{\circ}{H}_{rs} \subset H_{rs} \subset U_s \quad \forall\, (r,s) \in P$

(4) $H_{rs} \subset \overset{\circ}{H}_{tu}$, falls $r < t$ und $s < u$.

Setze nun

$$X_r = \begin{cases} \bigcap\limits_{r<s} H_{rs} & r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[\\ \phi & r < 0 \\ X & r \geq 1 \end{cases}$$

(5) Für $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$ gilt $X_r \subset \overset{\circ}{X}_s$.

(6) Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt $X_r \cap A = A_r$

Beweis: (5) ist sicherlich richtig, wenn $r < 0$ oder $s \geq 1$. (Beachte: $\overset{\circ}{X} = X$).
Sei also $0 \leq r < s < 1$, d.h. $(r,s) \in P$. Wähle ein $t \in \mathbb{Q}$ mit $r < t < s$. Dann gilt

$$X_r = \bigcap_{r<s} H_{rs} \subset H_{rt} \subset \overset{\circ}{H}_{ts} \subset \bigcap_{s<u} H_{su} = X_s.$$

Beweis: (6) Ist $r < 0$, so ist $A_r = \phi = X_r$. Ist $r \geq 1$, so ist $A_r = A$ und $X_r = X$. Für $0 \leq r < 1$ gilt

$$A_r \underset{(3)}{\subset} \bigcap_{r<s} H_{rs} \cap A = X_r \cap A \underset{(3)}{\subset} A \cap \bigcap_{r<s} U_s = A_r$$

Wir definieren nun $F : X \to [0,1]$ durch

$$F(x) = \inf\{r;\ x \in X_r\}.$$

Die Werte von F liegen in $[0,1]$. Weiter gilt für $a \in A$ wegen (6)

$$F(a) = \inf\{r;\ a \in X_r\} = \inf\{r;\ a \in A_r\} = f(a).$$

Seien nun $a < b$ aus $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$F^{-1}(]a,b[) = \bigcap \{\overset{\circ}{X} - X_r;\ r, s \in \mathbb{Q},\ a < r < s < b\}$$

als Vereinigung offener Mengen offen. Also ist F stetig. $\square$

4.15 Trennungslemma von Urysohn: Für einen Raum X sind äquivalent

(1) X ist T_4.

(2) Sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, dann gibt es eine stetige Abbildung $F : X \to [0,1]$, so daß $A \subset F^{-1}(0)$ und $B \subset F^{-1}(1)$.

Der Beweis folgt aus (4.14). Vergleiche auch den ersten Teil des Beweises.

Der Erweiterungssatz von Tietze läßt sich leicht verallgemeinern.

4.16 Übung: Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, dann besitzt f eine Erweiterung $F : X \to \mathbb{R}$. Gilt $|f(a)| < c$ (bzw. $\leq c$) $\forall a \in A$, kann F so gewählt werden, daß auch $|F(x)| < c$ (bzw. $\leq c$).

5 Kompakte Räume

Basis für viele wichtige Sätze und damit auch ihrer Folgerungen ist der Satz von Heine-Borel. Aus ihm folgt etwa der Satz über die Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen, und daraus wiederum der Mittelwertsatz, der für die Behandlung differenzierbarer Funktionen von zentraler Bedeutung ist.

5.1 Satz von Heine-Borel: Jede Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalls durch offene Intervalle besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Wir wollen nun topologische Räume studieren, die eine Art Heine-Borel-Kriterium erfüllen.

5.2 Definition: Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen eines Raumes X heißt *Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Die Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn jedes $U \in \mathcal{U}$ offen (bzw. abgeschlossen) ist. Eine *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$ ist eine Unterfamilie $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, so dass $\mathcal{W}$ wieder überdeckt.

5.3 Definition: Ein Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge A von X heißt kompakt, wenn sie als Teilraum kompakt ist.

Beispiele:

(1) Aus der Analysis ist bekannt: Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

(2) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert b. Dann ist

$$\{b\} \cup \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{kompakt}$$

Direkt aus der Definition bzw. durch Übergang zum Komplement folgt

5.4 Satz: Für eine Teilmenge A eines Raumes X sind äquivalent

(1) A ist kompakt.

(2) Ist $\mathcal{U}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, dann existiert eine endliche Teilfamilie $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ mit $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{W}} U$.

(3) Ist $\mathcal{B}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so dass $A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$, dann existiert eine endliche Teilfamilie $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ mit $A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B = \emptyset$.

5.5 Satz: Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Beweis: Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y, dann ist $\{f^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}$ offene Überdeckung von X. Also gibt es eine endliche Teilfamilie $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, so dass $\{f^{-1}(V); V \in \mathcal{W}\}$ überdeckt. Es folgt $f(X) = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} f(f^{-1}(V)) \subset \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$. □

Der nächste Satz ist Schlüssel für eine Reihe wichtiger Resultate über kompakte Räume.

5.6 Satz: Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ kompakte Teilmengen und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $A \times B$ in $X \times Y$. Dann gibt es offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ und endlich viele $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, so dass $A \times B \subset U \times V \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Schritt 1: Zu jedem $a \in A$ gibt es offene Mengen $U_a \subset X, V_a \subset Y$, sowie $U_{a,1}, \ldots, U_{a,n(a)} \in \mathcal{U}$, so dass $\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset \bigcup_{i=1}^{n(a)} U_{a,i}$.

Beweis: Sei $a \in A$ fest. Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $U_{a,b} \in \mathcal{U}$, so dass $(a,b) \in U_{a,b}$. Nach Definition der Produkttopologie gibt es offene Mengen $S_b \subset X, T_b \subset Y$, so dass $(a,b) \in S_b \times T_b \subset U_{a,b}$. Dann ist $\{T_b; b \in B\}$ eine offene Überdeckung von B, die eine endliche Teilüberdeckung $\{T_{b_1}, \ldots, T_{b_k}\}$ besitzt. Dann ist mit $n(a) = k, U_a = \bigcap_{i=1}^k S_{b_i}, V_a = \bigcup_{i=1}^k T_{b_i}$ und $U_{a,i} = U_{a,b_i}$ Schritt 1 gezeigt:

$$\{a\} \times B \subset U_a \times \bigcup_{i=1}^k T_{b_i} = \bigcup_{i=1}^k U_a \times T_{b_i} \subset \bigcup_{i=1}^k S_{b_i} \times T_{b_i} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{a,b_i}.$$

Schritt 2: Die U_a aus Schritt 1 bilden eine offene Überdeckung von A in X, die somit eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_r}\}$ besitzt. Wir setzen nun $U = \bigcup_{j=1}^r U_{a_j}$, $V = \bigcap_{j=1}^r V_{a_j}$. Dann gilt

$$A \times B \subset U \times V = \left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^r V_{a_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^r U_{a_j} \times V_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{i=1}^{n(a_j)} U_{a_j,i}.$$

Wir ziehen daraus einige Folgerungen.

5.7 Satz: Das topologische Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ von nicht-leeren Räumen ist genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.

Beweis: Ist X kompakt, dann ist nach (5.5) auch $X_i = p_i(X)$ kompakt, wobei $p_i : X \to X_i$ die Projektion ist. Sind umgekehrt alle X_i kompakt, folgt induktiv aus (5.6), dass auch X kompakt ist. □

5.8 Bemerkung: Auch das Produkt beliebig vieler kompakter Räume ist kompakt. Unser Beweis liefert das Ergebnis nur für endlich viele Faktoren.

5.9 Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ kompakte Teilmengen und $W \subset X \times Y$ offen, so dass $A \times B \subset W$. Dann gibt es offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, so dass $A \times B \subset U \times V \subset W$.

Beweis: Wende (5.6) mit der Überdeckung $\{W\}$ an. $\square$

5.10 Satz: (1) Sind A und B disjunkte, kompakte Teilmengen eines Hausdorffraumes X, dann lassen sich A und B trennen.

(2) Jeder abgeschlossene Teilraum A eines kompakten Raumes X ist kompakt.

(3) Jeder kompakte Teilraum A eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.

(4) Ein kompakter Hausdorffraum ist normal.

Beweis: (1) Nach (4.8) ist die Diagonale $\triangle$ abgeschlossen in $X \times X$. Da A und B disjunkt sind, gilt $A \times B \subset X \times X \backslash \triangle$. Nach (5.9) gibt es offene Mengen U und V, so dass $A \times B \subset U \times V \subset X \times X \backslash \triangle$, d.h. U und V trennen A und B.

(2) Sei $\mathcal{B}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, so dass $A \cap \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset$. Da X kompakt ist, gibt es in $\mathcal{B} \cup \{A\}$ eine endliche Teilfamilie $\{B_1, \ldots, B_n\}$ mit leerem Durchschnitt. Insbesondere gilt $A \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \emptyset$.

(3) Sei $x \in X \backslash A$. Da A und $\{x\}$ kompakt sind, lassen sie sich nach (1) trennen. Insbesondere ist $X \backslash A$ offen.

(4) folgt aus (1) und (2). $\square$

Für die Konstruktion von Homöomorphismen werden wir folgendes Ergebnis häufig benutzen.

5.11 Satz: Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y hausdorffsch. Dann gilt

(1) f ist abgeschlossen, d.h. ist $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist $f(A) \subset Y$ abgeschlossen.

(2) Ist f surjektiv, so ist f eine Identifizierung.

(3) Ist f injektiv, so ist f eine Einbettung.

Beweis: (1): Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A und damit $f(A)$ kompakt. Also ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

(2) Surjektive abgeschlossene stetige Abbildungen sind Identifikationen.

(3) Sei $g : Z \to X$ eine Abbildung, so dass $f \circ g$ stetig ist, und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $g^{-1}(A) = (f \circ g)^{-1}(f(A))$ nach (1) abgeschlossen, und damit g stetig. $\square$

Teil (1) und (3) verallgemeinern bekannte Resultate über stetige Abbildungen auf abgeschlossenen Intervallen. Ein weiterer Satz dieser Art ist

5.12 Satz: Ist X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Punkte $a, b \in X$, so dass $f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ \forall x \in X$.

Beweis: Wir zeigen die Existenz des Minimums. Sei $c = \operatorname{Inf} f(x)$, falls dieses existiert, und sonst $c = -\infty$. Setze $A_q = f^{-1}(]-\infty, q])$ und $A = \bigcap_{c<q} A_q$. Jedes A_q ist abgeschlossen und für $c < q$ nicht leer. Angenommen $A = \emptyset$, dann gäbe es nach (5.4.3) endlich viele q_i, wir ordnen sie nach Größe $q_1 < \ldots < q_n$, so dass $\bigcap_{i=1}^n A_{q_i} = \emptyset$. Aber $\bigcap_{i=1}^n A_{q_i} = A_{q_1} \neq \emptyset$. Also ist $A \neq \emptyset$. Für $a \in A$ gilt $c \leq f(a) \leq q\ \forall q > c$. Es folgt $c = f(a)$. $\square$

Wir wenden uns noch kurz kompakten Mengen in metrischen Räumen zu.

5.13 Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für Teilmengen $A, B \subset X$ heißt

$$d(A, B) = \operatorname{Inf}\{d(x, y);\ x \in A, y \in B\}$$

der *Abstand* von A und B, und

$$d(A) = \operatorname{Sup}\{d(x, y);\ x, y \in A\}$$

der *Durchmesser* von A.

5.14 Übung: Versehen wir $X \times X$ mit der Produkttopologie, dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} d : X \times X \to \mathbb{R}, & (x, y) \mapsto d(x, y) \\ d(-, A) : X \to \mathbb{R}, & x \mapsto d(x, A) \end{array}$$

stetig.

Als einfache Folgerung erhalten wir

5.15 Satz: Für nicht-leere Teilmengen A, B eines metrischen Raumes (X, d) gilt:

(1) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(2) A kompakt, B abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow d(A, B) > 0$ (ist A nur abgeschlossen, ist dies i.a. falsch).

(3) Ist A kompakt, so gibt es ein $a \in A$, so dass $d(A, B) = d(a, B)$.

(4) Sind A und B kompakt, gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $d(A, B) = d(a, b)$.

(5) $d(A) = d(\overline{A})$.

(6) Ist A kompakt, gibt es $a, b \in A$ mit $d(A) = d(a, b)$.

Für spätere Anwendungen benötigen wir

5.16 Lebegue'sches Lemma: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eines kompakten metrischen Raumes (X, d) gibt es eine Zahl λ, genannt *Lebesguezahl* zu $\mathcal{U}$, so dass jede Menge M mit $d(M) < \lambda$ in einem $U \in \mathcal{U}$ liegt.

Beweis: Jedes $x \in X$ liegt in einem $U(x) \in \mathcal{U}$. Da $U(x)$ offen ist, enthält es eine Kugelumgebung $K(x; \varepsilon(x)) = \{y \in X; d(x, y) < \varepsilon(x)\}$. Die offene Überdeckung $\mathcal{W} = \{K(x; \frac{1}{2}\varepsilon(x)); x \in X\}$ von X enthält eine endliche Teilüberdeckung $\{K(x_1, \frac{1}{2}\varepsilon(x_1)), \ldots, K(x_n, \frac{1}{2}\varepsilon(x_n))\}$. Sei $\lambda = \min\{\frac{1}{2}\varepsilon(x_1), \ldots \frac{1}{2}\varepsilon(x_n)\}$ und M eine Menge mit $d(M) < \lambda$. Wähle $y \in M$. Das liegt in einem $K(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon(x_i))$. Da für jedes $z \in M$ gilt, $d(y, z) < \lambda < \frac{1}{2}\varepsilon(x_i))$, folgt $M \subset K(x_i, \varepsilon(x_i)) \subset U(x_i) \in \mathcal{U}$. □

Wir benötigen für später noch eine Abschwächung des Kompaktheitbegriffs.

5.17 Definition: Ein Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine kompakte Umgebung K von x in U gibt, d.h. es gibt eine offene Menge V, so dass $x \in V \subset K \subset U$.

5.18 Satz: Jeder kompakte Hausdorffraum X ist lokal kompakt.

Beweis: Sei U offene Umgebung von $x \in X$. Da X normal ist, besitzt x eine abgeschlossene Umgebung K in U. Nach (5.10) ist K kompakt. □

5.19 Satz: Ein lokal kompakter Hausdorffraum X ist regulär.

Beweis: Sei U eine offene Umgebung von $x \in X$. Dann besitzt x eine kompakte Umgebung K in U, die nach (5.10) abgeschlossen ist. Also ist X regulär nach (4.11). □

5.20 Übung: (*Einpunktkompaktifizierung*) Sei X lokal kompakter Hausdorffraum und $X^c := X \sqcup \{w\}$. Offene Mengen in X^c seien alle offene Mengen von X und alle Mengen der Form $X^c \backslash K$, wobei $K \subset X$ kompakt ist. Zeigen Sie: Dies definiert eine Topologie auf X^c, die Inklusion $X \hookrightarrow X^c$ ist eine Einbettung, X^c ist kompakt.

5.21 Übung: (1) Ein Hausdorffraum ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

(2) Sind X und Y nicht leer, dann ist $X \times Y$ genau dann lokal kompakt, wenn es X und Y sind.

6 Abbildungsräume

Sei $Abb(X,Y)$ die Menge der Abbildungen der Menge X in die Menge Y. Die Abbildung

$$e_{X,Y} : X \times Abb(X,Y) \longrightarrow Y,\ (x,f) \longmapsto f(x)$$

heißt *Auswertung.*

6.1 Ist $f : X \times Y \to Z$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung $\hat{f} : Y \to Abb(X,Z)$, genannt *adjungierte Abbildung* von f, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Abb(X,Z) \arrow[rr, "e_{X,Z}"] & & Z \\ & X \times Y \arrow[ul, "id_X \times \hat{f}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. $\hat{f}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(y) : X \longrightarrow Z,\ x \longmapsto f(x,y)$$

Beweis: $f(x,y) = e_{X,Z} \circ (id_X \times \hat{f})(x,y) = e_{X,Y}(x, \hat{f}(y)) = \Big(\hat{f}(y)\Big)(x)$. Also muss $\hat{f}(y)$ wie angegeben definiert werden. $\square$

Wir topologisieren die Teilmenge $C(X,Y)$ der stetigen Abbildungen in $Abb(X,Y)$.

6.2 Definition: Die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X,Y)$ hat als Subbasis die Mengen

$$W(K,U) = \{f \in Abb(X,Y);\ f(K) \subset U, K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ offen}\}$$

$C(X,Y)$ versehen mit dieser Topologie wird Y^X bezeichnet.

6.3 Satz: (1) Sind $g : A \to X$ und $h : Y \to Z$ stetig, dann sind es auch

$$g^* : Y^X \to Y^A,\ f \mapsto f \circ g \text{ und } h_* : Y^X \to Z^X,\ f \mapsto h \circ f$$

(2) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann ist es auch $\hat{f} : Y \to Z^X$.

(3) Ist X lokal kompakt, dann ist $e_{X,Z} : X \times Z^X \to Z$ stetig.

(4) Ist X lokal kompakt, dann ist $Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$, $f \mapsto \hat{f}$, bijektiv.

Beweis: (1) Nach (2.12) genügt es nachzuweisen, dass $(g^*)^{-1}(W(K,U))$ offen in Y^X ist, wobei $K \subset A$ kompakt und $U \subset Y$ offen. Aber

$$(g^*)^{-1}(W(K,U)) = \{f \in Y^X;\ f \circ g(K) \subset U\} = W(g(K),U)$$

ist eine Subbasismenge von Y^X, da $g(K)$ kompakt ist.
Sei $L \subset X$ kompakt und $V \subset Z$ offen. Dann ist

$$\begin{aligned}(h_*)^{-1}(W(L,V)) &= \{f \in Y^X; h \circ f(L) \subset V\} = \{f \in Y^X; f(L) \subset h^{-1}(V)\}\\ &= W(L,h^{-1}(V)).\end{aligned}$$

(2) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann natürlich auch $\hat{f}(y) : X \to Z$, also ist Bild $(\hat{f}) \subset Z^X$. Sei $K \subset X$ kompakt und $V \subset Z$ offen. Sei $y \in \hat{f}^{-1}(W(K,V))$, d.h. $\hat{f}(y)$ bildet K nach V ab, also $f(K \times y) \subset V$ oder $K \times y \subset f^{-1}(V)$. Nach (5.9) gibt es offene Mengen $U_1 \subset X$, $U_2 \subset Y$, so dass $K \times y \subset U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(V)$. Insbesondere gilt $f(K \times U_2) \subset V$, also $U_2 \subset \hat{f}^{-1}(W(K,V))$. Damit ist $\hat{f}^{-1}(W(K,V))$ offen.

(3) Sei V offen in Z und $(x,f) \in e_{X,Z}^{-1}(V)$, also $f(x) \in V$ oder $x \in f^{-1}(V)$. Da X lokal kompakt ist, besitzt x eine kompakte Umgebung K in $f^{-1}(V)$. Da $f(K) \subset V$, ist $K \times W(K,V)$ Umgebung von (x,f), die in $e_{X,Z}^{-1}(V)$ liegt, da $e(K,W(K,V)) \subset V$.

(4) Ist $f : X \times Y \to Z$ stetig, dann ist nach (2) $\hat{f} : Y \to Z^X$ stetig. Ist umgekehrt $\hat{f}$ stetig, dann nach (6.1) auch f, da $e_{X,Z}$ stetig ist. Nach (6.1) entsprechen sich f und $\hat{f}$ umkehrbar eindeutig. $\square$

Es wäre nun schön zu wissen, wann die Bijektion (6.3.4) ein Homöomorphismus ist. Auskunft gibt das

6.4 Exponentialgesetz: Sind X und Y lokal kompakt, so ist

$$Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y,\ f \mapsto \hat{f}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis: Mit X und Y ist auch $X \times Y$ lokal kompakt (5.21). Damit sind die Auswertungsabbildungen $e_{X,Z}$, $e_{X\times Y,Z}$, und e_{Y,Z^X} stetig. Sei $h : (Z^X)^Y \to Z^{X\times Y}$ die zu $e_{X,Z} \circ (id_x \times e_{Y,Z^X})$ adjungierte Abbildung, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z^{X\times Y} & \xleftarrow{e_{X\times Y,Z}} & Z \\ \big\uparrow{\scriptstyle id_{X\times Y}\times h} & & \big\uparrow{\scriptstyle e_{X,Z}} \\ X \times Y \times (Z^X)^Y & \xrightarrow{id_X \times e_{Y,Z^X}} & X \times Z^X \end{array}$$

kommutiert. Sei $u : Y \times Z^{X\times Y} \to Z^X$ die Adjungierte zu $e_{X\times Y,Z}$ und $k : Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y$ die Adjungierte zu u; d.h. die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times Z^X \arrow[rr, "e_{X,Z}"] & & Z \\ & X \times Y \times Z^{X\times Y} \arrow[ul, "id_X \times u"] \arrow[ur, "e_{X\times Y,Z}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \times (Z^X)^Y \arrow[rr, "e_{Y,Z^X}"] & & Z^X \\ & Y \times Z^{X\times Y} \arrow[ul, "id_Y \times k"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren. Nach (6.3.2) sind h und k stetig. Nach (6.3.4) genügt es zu zeigen, dass $k(f) = \hat{f}$ und $h(\hat{f}) = f$. Sei $f : X \times Y \to Z$ aus $Z^{X\times Y}$. Dann gilt für $k(f) : Y \to Z^X$

$$k(f)(y) = e_{Y,Z^X}(y, f) = u(y, f)$$

und

$$u(y, f) : X \to Z, x \mapsto e_{X,Z}(x, u(y, f)) = e_{X\times Y,Z}(x, y, f) = f(x, y).$$

Also ist $k(f) = \hat{f}$. Für $h(\hat{f}) : X \times Y \to Z$ gilt

$$\begin{aligned} h(\hat{f})(x, y) &= e_{X,Z} \circ (id_X \times e_{Y,Z^X})(x, y, \hat{f}) = e_{X,Z} \circ (x, \hat{f}(y)) \\ &= [\hat{f}(y)](x) = f(x, y) \end{aligned}$$

□

6.5 Übung: (1) Ist X lokal kompakt, dann ist

$$(Y \times Z)^X \to Y^X \times Z^X, f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$$

ein Homöomorphismus (p_i sind die Projektionen)

(2) Ist $Y \to Z$ eine Einbettung, dann auch $Y^X \to Z^X$.

(3) Sind A, B, X, Y Räume und A, B lokal kompakt, dann ist

$$X^A \times Y^B \to (X \times Y)^{A\times B},\ (f, g) \mapsto f \times g$$

stetig.

6.6 Bemerkung: (6.4.1) und (6.4.3) bleiben richtig, wenn man lokal kompakt durch hausdorffsch ersetzt.

6.7 Satz: Sind X und Y lokal kompakt, dann ist die Komposition

$$Y^X \times Z^Y \to Z^X,\ (f, g) \mapsto g \circ f$$

stetig.

Beweis: Nach (6.3.3) ist

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y^X \times Z^Y & \xrightarrow{e_{X,Y} \times id} & Y \times Z^Y & \xrightarrow{e_{Y,Z}} & Z \\ & & & & \\ (x, f, g) & \longrightarrow & (f(x), g)) & \longrightarrow & g \circ f(x) \end{array}$$

stetig. Die Komposition ist die Adjungierte dieser Abbildung. □

Für spätere Anwendungen ist folgender Satz besonders wichtig.

6.8 Satz: Ist $f : X \to Y$ eine Identifizierung und Z lokal kompakt, dann ist auch $id \times f : Z \times X \to Z \times Y$ eine Identifizierung.

Beweis: Sei $g : Z \times Y \to T$ eine Abbildung, so dass $g \circ (id \times f)$ stetig ist. Wir müssen zeigen, dass g stetig ist. Sei $h : X \to T^Z$ die (stetige) Adjungierte zu $g \circ (id \times f)$. d.h.

$$h(x) : Z \to T, z \mapsto g \circ (id \times f)(z, x) = g(z, f(x)) = [\hat{g}(f(x))](z),$$

wobei $\hat{g}$ die Adjungierte von g ist. Es folgt $h = \hat{g} \circ f$. Da h stetig und f Identifizierung ist, ist $\hat{g}$ stetig und damit auch g nach (6.3.4). □ □