STUDIENVORKURS MATHEMATIK

Sommer 2002

Prof. Dr. H.-J. Reiffen
Prof. Dr. H.-W. Trapp
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

Schrift und Graphiken: Maria Anna Gausmann

Vorbemerkungen

Der STUDIENVORKURS MATHEMATIK richtet sich an Studienanfänger und -interessenten, die sich auf das Studium der Mathematik/Informatik vorbereiten oder ein anderes Fach studieren wollen, in dem mathematische Hilfsmittel wesentlich benötigt werden (Natur-, Ingenieur-, Wirtschaftswissenschaften).

Ziel des Vorkurses ist es zunächst, die Kenntnis wichtiger mathematischer Gegenstände und Methoden aus dem Kursangebot des Gymnasiums aufzufrischen. Durch die Behandlung weiterführender Themen soll den Teilnehmern darüber hinaus ein Einblick in das weite Spektrum des mathematischen Fachstudiums ermöglicht werden. Diesem Ziel dient auch die Ergänzung des Kursprogrammes durch spezielle Fachvorträge, die von verschiedenen Dozenten des Fachbereichs zu besonderen Themen angeboten werden.

Wie der Vorkurs selbst gibt auch dieses Skriptum einen exemplarischen Eindruck von der üblichen Art und Form der mathematischen Lehrveranstaltungen aus Vorlesung, Übung und Aufgaben, die von den Studenten selbstständig in kleinen Gruppen bearbeitet werden.

Die Darstellung unterliegt einer erkennbaren inneren Systematik, strebt aber doch eine möglichst große Unabhängigkeit der einzelnen Teile an. Natürlich greift der Text auf Grundkenntnisse und -fertigkeiten der Teilnehmer zurück (z. B. Umgang mit den reellen Zahlen, Vertrautheit mit dem Funktionsbegriff, den Grundbegriffen der Stetigkeit und der Konvergenz); er wird daher in manchen Teilen als zu langatmig, in anderen dagegen als zu kompakt erscheinen. Auch das ist exemplarisch (und daher beabsichtigt).

Der STUDIENVORKURS MATHEMATIK will aber keineswegs dem Studium inhaltlich vorgreifen; er will nur dessen Beginn etwas erleichtern.

Inhaltsverzeichnis

Vertiefende Literatur (im Text zitiert als R/T):

Reiffen/Trapp: Einführung in die Analysis,
Differentiation und Integration;
Universitätsverlag Rasch, Osnabrück 1999

1 Potenzen und Wurzeln

Wir beginnen mit einer wohlvertrauten Vereinbarung:

1.1 Definition: Für jede Zahl a und jede positive natürliche Zahl n heißt das n-fache Produkt von a mit sich selbst die *n-te Potenz* von a. Wir *bezeichnen* diese Zahl mit a^n und *vereinbaren* zusätzlich $a^0 := 1$. □

Wir notieren die elementaren

1.2 *Potenzrechenregeln:*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$,
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

□

Etwas weniger elementar ist die folgende Regel:

1.3 Für reelle Zahlen a,b und jede natürliche Zahl n gilt:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^{n-k}b^k + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

□

Beweis: Wir multiplizieren die rechte Seite einfach aus.

$$\begin{aligned}
&(a-b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\
&= a^{n+1} + a^n b + \cdots + a^2 b^{n-1} + ab^n \\
&\qquad - a^n b - \cdots - a^2 b^{n-1} - ab^n - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1}
\end{aligned}$$

1. Im Falle $n = 1$ ist das die wohlvertraute Formel $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$.
2. Im Falle $n = 2$ ist das die Formel $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.
Für $a = 1$ ergibt sich aus 1.3 die *geometrische Summenformel:*

1.4 Für jede Zahl $b \neq 1$ und jede natürliche Zahl n ist

$$1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Wir leiten eine Summenformel für die Summenpotenz $(a+b)^n$ her.

Beim Ausmultiplizieren des n-fachen Produktes $(a+b)^n$ erhält man offenbar eine 2^n-fache Summe der Potenzprodukte $a^k b^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$. Dabei tritt $a^k b^{n-k}$ jedesmal dann auf, wenn das a aus k der Faktoren $a+b$ mit dem b aus den $n-k$ anderen Faktoren multipliziert wird. Also tritt $a^k b^{n-k}$ genau so oft auf, wie es k-elementige Teilmengen von $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ gibt.

1.5 Für je zwei natürliche Zahlen k und n wird die Anzahl der k-elementigen Teilmengen vom $\mathbb{N}_n^*$ mit dem Symbol $\binom{n}{k}$ bezeichnet (gelesen: n über k). □

Wir haben uns überlegt:

1.6 Für reelle Zahlen a, b und jede natürliche Zahl n gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□

Dabei soll das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{n}$ beschreiben, daß die Zahlen $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ aufsummiert werden.

Das *Binomialtheorem* 1.6 ist erst dann etwas wert, wenn wir die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ berechnen können.

Trivial ist aufgrund ihrer Definition: Für jede natürliche Zahl n ist $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$, wenn $k > n$ ist; $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$ für $n \geq 1$.

Für $1 \leq k \leq n$ sind die k-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}_{n+1}^*$ die k-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}_n^*$ sowie die durch Hinzunahme von $n+1$ zu den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}_n^*$ gewonnenen k-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}_{n+1}^*$. Es gilt also die *Rekursionsformel*:

1.7 Für alle positiven natürlichen Zahlen k, n gilt: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. □

Diese Regel definiert das *Pascalsche Dreieck (Blaise Pascal,* 1623-1662):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 &
\end{array}$$

Damit kann man für kleine n die Binomialkoeffizienten leicht bestimmen. Bei großen n verwendet man folgende Formel:

1.8 Für die positiven natürlichen Zahlen $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

$\square$

Beweis: k Personen besetzen einen Saal mit n nummerierten Sitzen. Wieviele verschiedene Sitzordnungen gibt es?

Die erste Person hat n Wahlmöglichkeiten, die zweite dann nur noch $n-1$; in Falle $k = 2$ gibt es demnach $n \cdot (n-1)$ Sitzordnungen. Die dritte eintretende Person findet nur noch $n-2$ freie Plätze vor; im Falle $k = 3$ gibt es demnach $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Sitzordnungen. Allgemein gibt es bei k Personen im Falle $k \leq n$ insgesamt $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ Sitzordnungen. Im Fall $k > n$ gibt es offenbar keine (“null”) Sitzordnung.

Speziell gibt es im Falle $k = n$

1.9 $\quad n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \qquad$ (gelesen: *n-Fakultät*)

Möglichkeiten, n Plätze mit n Personen zu besetzen.

Wir fahren in unserem Beweis fort, indem wir die Anzahl der Sitzordnungen auf folgende Weise bestimmen: Wir wählen für unsere k Personen eine Menge M von k Plätzen aus der Menge N aller n Plätze aus, auf die wir unsere Besucher platzieren. Sie haben $k!$ Möglichkeiten, in M Platz zu nehmen. Für die Auswahl von M gibt es (gemäß 1.5) genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Ingesamt gibt es also nach dieser Überlegung $k!\binom{n}{k}$ Sitzordnungen. Es muß also gelten:

$$k!\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Daraus folgt die behauptete Formel 1.8. $\square$

Z.B. ist die Anzahl der Möglichkeiten im Zahlenlotto *6 aus 49* gleich $\binom{49}{6}$, also

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13.983.816.$$

Wir notieren ohne die einfachen Beweise die

1.10 *Ungleichungsregeln* für Potenzen:

1. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^m > 0$
2. $a > 1, m > 0 \quad \Rightarrow \quad a^m > 1$
3. $a > 1, m < n \quad \Rightarrow \quad a^m < a^n$
4. $0 < a < 1, m < n \quad \Rightarrow \quad a^m > a^n$
5. $0 \le a < b, m > 0 \quad \Rightarrow \quad a^m < b^m$

$\square$

Die zu gegebener natürlichen Zahl n auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ definierte *Potenzfunktion* mit den Werten x^n für variierendes $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir einfach mit x^n. Aufgrund der Ungleichungsregeln gilt dafür:

1.11 Die Potenzfunktion x^n ist für *ungerades* n streng monoton wachsend auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$. Für *gerades* n ist x^n auf $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$ streng monoton wachsend und auf $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ streng monoton fallend. $\square$

Als streng monotone Funktion - auf $\mathbb{R}$ für ungerades n, auf $\mathbb{R}_+$ für gerades $n \ge 2$ - hat x^n eine ebenfalls streng monoton wachsende Umkehrfunktion. Ihr Definitionsbereich ist die Menge M derjenigen Zahlen b, die als Wert von x^n, also in der Form $b = a^n$ auftreten. Ein etwas beschwerlicher direkter Beweis oder die Ausnutzung der Stetigkeit von x^n (Zwischenwertsatz) zeigt:

1.12 Sei n ein positive natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder nichtnegativen reellen Zahl b genau eine nichtnegative reelle Zahl a mit $a^n = b$. $\square$

Speziell folgt daraus:

1.13 Ist n eine *ungerade* natürliche Zahl, so gibt es zu jeder reellen Zahl b genau eine reelle Zahl a mit $a^n = b$. $\square$

Beweis: Für negatives $x \in \mathbb{R}$ ist (bei ungeradem n):

$$x^n = (-|x|)^n = (-1)^n |x|^n = -|x|^n,$$

folglich negativ. Für $b \ge 0$ folgt die Behauptung daher aus 1.12. Im Falle $b < 0$ ist $-b > 0$. Dazu gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c^n = -b$. Für $a := -c$ gilt dann $a^n = -c^n = -(-b) = b$.

Wegen $(-a)^n = -b$ ist a eindeutig bestimmt. $\square$

Für *gerades* n und $x \le 0$ ist

$$x^n = (-|x|)^n = (-1)^n |x|^n = |x|^n \ge 0$$

Also hat die Potenzfunktion x^n in diesem Fall keine negativen Werte.

Für die Menge M der Werte von x^n gilt also:

$$M = \mathbb{R}, \text{ falls } n \text{ ungerade}, \ M = \mathbb{R}_+, \text{ falls } n \text{ gerade ist.}$$

1.14 Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion x^n auf $\mathbb{R}$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$ bzw. auf $\mathbb{R}_+$ für gerades $n \in \mathbb{N}^*$ heißt die n-te *Wurzelfunktion*. Ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, wenn n ungerade, und $\mathbb{R}_+$, wenn n gerade ist. Wir bezeichnen sie mit $\sqrt[n]{\mathsf{x}}$. □

Definitionsgemäß gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$ bzw. für $x, y \in \mathbb{R}_+$ für gerades $n \in \mathbb{N}^*$:

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$$

Für ungerades n ist also stets, d. h. für reelle Zahl x

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \text{ und } \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Für gerades $n \geq 2$ gilt das nur für $x \geq 0$. Für $x < 0$ ist dann $\sqrt[n]{x}$ gar nicht definiert; allerdings ist dann $x^n > 0$ und $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Natürlich ist $\sqrt[1]{x} = x$, weshalb das Zeichen $\sqrt[1]{\ }$ gar nicht gebraucht wird. Das Zeichen $\sqrt[2]{\ }$ für die *"Quadratwurzel"* wird in der Regel einfach durch $\sqrt{\ }$ ersetzt.

Das *konkrete Berechnen* von Wurzeln, also z.B. die Angabe $\sqrt{2} = 1,4142135$, erfolgt nach Rechenverfahren, die es erlauben, den "wahren" Zahlenwert durch konkrete Näherungswerte prinzipiell beliebig genau anzugeben.

Ein solches Rechenverfahren können wir für den Sonderfall der Quadratwurzeln ohne besondere Hilfsmittel herleiten. Dazu sei a ein positive reelle Zahl, deren Quadratwurzel $\sqrt{a}$ berechnet werden soll. Wir wählen zu Beginn irgendeinen (groben) Näherungswert $a_0 \geq \sqrt{a}$ von $\sqrt{a}$. Ist dann ("zufällig") $a_0 = \sqrt{a}$, also $a_0^2 = a$, so ist $a_0 = \frac{a}{a_0}$. Normalerweise ist $a_0 \neq \frac{a}{a_0}$. Dann ist das arithmetische Mittel

$$(1) \qquad a_1 := \frac{1}{2}(a_0 + \frac{a}{a_0})$$

ein besserer Näherungswert; denn es liegt wie $\sqrt{a}$ zwischen $\frac{a}{a_0}$ und a_0. Genauer gilt:

$$a_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(a_0 - 2\sqrt{a} + \frac{a}{a_0}) = \frac{1}{2a_0}(a_0^2 - 2a_0\sqrt{a} + (\sqrt{a})^2) = \frac{1}{2a_0}(a_0 - \sqrt{a})^2,$$

$$0 \leq a_1 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(a_0 - \sqrt{a})^2.$$

Im Falle $a \geq 1$ folgt daraus: Gibt der Näherungswert a_0 den wahren Wert von $\sqrt{a}$ etwa auf n Stellen hinter dem Komma richtig an, d.h. es ist $a_0 - \sqrt{a} < 10^{-n}$, so ist

$$a_1 - \sqrt{a} < \frac{1}{2}10^{-2n} < 10^{-2n};$$

d.h. a_1 gibt $\sqrt{a}$ dann bereits auf doppelt so viele Kommastellen richtig an!

Ist das noch nicht genau genug - nun kommt der eigentliche Witz! -, so wiederholt man mit a_1 anstelle von a_0 das Verfahren und berechnet als besseren Näherungswert die Zahl

$$a_2 := \frac{1}{2}(a_1 + \frac{a}{a_1}).$$

So fährt man fort bis zur gewünschten Genauigkeit.

Diese unter Kontrolle zu halten, verwendet man bequemerweise eine Fehlerabschätzung, in der $\sqrt{a}$ nicht vorkommt.

$$\begin{aligned} a_1 - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(a_0 - 2\sqrt{a} + \frac{a}{a_0}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_0} - \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{a_0} - \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2(\sqrt{a_0} + \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2}{(\sqrt{a_0} + \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2} = \frac{1}{2}\frac{(a_0 - \frac{a}{a_0})^2}{(\sqrt{a_0} + \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2} \end{aligned}$$

Aus (1) ersieht man: $a_0 - \frac{a}{a_0} = 2(a_0 - a_1)$. Ferner ist

$$(\sqrt{a_0} + \sqrt{\frac{a}{a_0}})^2 = a_0 + \frac{a}{a_0} + 2\sqrt{a} \geq 2a_1 + 2\sqrt{a} \geq 4\sqrt{a}.$$

So erhalten wir die *Fehlerabschätzung*:

$$(2) \qquad 0 \leq a_1 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(a_0 - a_1)^2.$$

Danach braucht man nur die Anzahl n der bei a_1 und a_0 übereinstimmenden Kommastellen festzustellen. Dann gibt a_1 (für $a \geq 1$) $\sqrt{a}$ mindestens auf $2n$ Kommastellen an!

Beispiel: $a = 2$

Wir beginnen etwa mit $a_0 := 2$. Dann ist die Bedingung $a_0^2 \geq 2$ erfüllt. Gemäß (1) berechnen wir

$$a_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Gemäß (2) ist dann

$$a_1 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(0,5)^2 = 0,125.$$

Wir wiederholen das Verfahren mit a_1 anstelle von a_0:

$$a_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12} = 1,4166\ldots$$

Jetzt ist bereits

$$a_2 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{12})^2 < 0,004.$$

Wir rechnen weiter:

$$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408} = 1,4142156\ldots$$

Das stimmt mit $\sqrt{2}$ mindestens schon auf vier Kommastellen überein. Genauer gilt sogar:

$$a_3 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{408})^2 < 0,000004.$$

Weiter ergibt sich:

$$a_4 = \frac{1}{2}(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}) = \frac{665.857}{470.832} = 1,41421.35623.746\ldots$$

Diese Zahl stimmt mit a_3 auf fünf Stellen hinter dem Komma überein, mit $\sqrt{2}$ also auf mindestens zehn! Die Rechnung mit (2) zeigt, daß bereits elf Stellen richtig sind. Im nächsten Schritt erhält man mindestens 22 Stellen hinter dem Komma.

Das Verfahren "konvergiert" ganz vorzüglich. Es hat noch einen großen Vorteil: Es ist gegen Rechen- und Rundungsfehler stabil. Denn bei der Berechnung etwa von a_4 wird das eingesetzte a_3 ja einfach als irgendwie gefundener Anfangswert verwendet. Daß a_3 selbst schon nach dem Verfahren berechnet wurde, geht bei der Berechnung von a_4 nicht mehr ein! Auch bei der Fehlerabschätzung wird a_4 nur mit a_3 verglichen!

Auch zur Berechnung höherer Wurzeln gibt es analoge Berechnungsverfahren.

Die *Rechenregeln* für die Wurzelfunktionen ergeben sich einfach aus den entsprechenden Regeln der Potenzfunktionen (deren Umkehrfunktionen sie ja sind).

1.15 Es seien m und n positive natürliche Zahlen. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}_+$ stets

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$,
3. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Wenn n ungerade ist, gelten die erste und die dritte Regel auch für negative a und b. Sind m und n ungerade, gilt die zweite Regel auch für negative a.

Beweis:

1. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Rightarrow \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{m \cdot n} = ((\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n)^m = (\sqrt[m]{a})^m = a \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
3. folgt aus 1. wegen $a^m = a \cdot a \cdots a \quad (m\text{-mal})$. □

Aufgrund der *Ungleichungsregeln* 1.10 für Potenzen gilt für Wurzeln:

1.16 Es seien m, n positive natürliche und a, b nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt:

1. $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$,
2. $m < n \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ für $0 < a < 1$ und $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$ für $a > 1$.

Wenn n ungerade ist, gilt die erste Regel auch für negative a und b. □

Beweis: Die erste Regel besagt ja nur, daß $\sqrt[n]{\mathsf{x}}$ wie x^n streng monoton wachsend ist!

Für $0 < a < 1$ ist $a^n < a^m$. Folgt:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n} < \sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}.$$

Für $a > 1$ ist $a^m < a^n$. Folgt wie gerade: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$. □

Ist die Zahl m ein Vielfaches von n, also $m = kn$, so gilt nach den Rechenregeln $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^{kn} = a^k$, anders geschrieben: $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Das nimmt man zum Anlaß für folgende *Vereinbarung*: Für $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}_+$ sei

1.17 $a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m$.

Für ungerades n ist auch $a < 0$ zugelassen. $\square$

Nun prüft man nach, daß die Potenzrechenregeln auch für rationale Exponenten $r \geq 0$ weitergelten. Insbesondere gilt:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \text{für } r, s \in \mathbb{Q}_+, a \in \mathbb{R}_+$$

Im Fall $r \geq s$ folgt daraus:

$$a^s \cdot a^{r-s} = a^{s+r-s} = a^r,$$

im Fall $a > 0$ also $a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$.

Das nimmt man zum Anlaß für die *Vereinbarung:* Für jede positive rationale Zahl s und jede positive reelle Zahl a sei

1.18 $a^{-s} = \frac{1}{a^s}$.

Für positive reelle Zahlen a ist damit die "Potenz" a^r für jede rationale Zahl r erklärt.

Es gelten dafür die *Potenzrechenregeln:*

1.19 Es seien r und s rationale Zahlen. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ stets

1. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$, $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
2. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;
3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

$\square$

Den (langweiligen) Beweis möge der Leser ausführen. Das gilt auch für den Beweis der folgenden *Ungleichungsregeln:*

1.20 Es seien r und s rationale Zahlen, a und b positive reelle Zahlen. Dann gilt:

1. $a < b \Rightarrow a^r < b^r$, falls $r > 0$ ist, $a^r > b^r$, falls $r < 0$ ist;
2. $r < s \Rightarrow a^r < a^s$, falls $a > 1$ ist, $a^r > a^s$, falls $a < 1$ ist. $\square$

Die erste Regel besagt: Die Potenzfunktion x^r auf $\mathbb{R}_+^*$ ist streng monoton wachsend, wenn r positiv ist, und streng monoton fallend, wenn r negativ ist. (Klar: x^0 ist die Konstante 1.)

Anwendung

Die Potenzrechnung ist die mathematische Grundlage der Zinseszinsrechnung. Der einfachste Fall: Bei gleichbleibender jährlicher ("nachschüssiger")

Verzinsung um $p\%$ wächst das eingesetzte Kapital K_0 am Ende des ersten Jahres auf

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = K_0(1 + \frac{p}{100}) = K_0 q$$

um den *Aufzinsungsfaktor* $q := 1 + \frac{p}{100}$.

Am Ende des zweiten Jahres wächst K_1 wieder um den Faktor q auf $K_2 = K_1 q$; bezogen auf K_0 heißt das $K_2 = K_0 q^2$.

1.21 Am Ende des n-ten Jahres ist das *Anfangskapital* K_0 auf das *Endkapital*

$$K_n = K_0 q^n$$

angewachsen. □

Zum Beispiel wächst das Anfangskapital K_0 bei 7% Zinsen in 10 Jahren um den Faktor $q^n = 1,07^{10} = 1,967$, also natürlich nicht nur um $7 \cdot 10 = 70$ Prozent; vielmehr verdoppelt sich K_0 nahezu.

Der Zinseszinseffekt (Verzinsung der Zinsen) macht sich vor allem bei langen Laufzeiten bemerkbar. Selbst kleine Unterschiede im *Zinsfuß* p wirken sich dann deutlich aus. Z.B. ist die Relation zwischen drei- und zweiprozentigem Wachstum in 50 Jahren gleich

$$\frac{1,03^{50}}{1,02^{50}} = (\frac{1,03}{1,02})^{50} = 1,01^{50} = 1,64.$$

Der Unterschied beträgt also fast zwei Drittel! So erklärt sich die langfristige unterschiedliche Entwicklung benachbarter Volkswirtschaften bei geringem Unterschied in den durchschnittlichen Wachstumsfaktoren q. Bei großen Unterschieden wirkt sich der Zinseszinseffekt für die schwächere Volkswirtschaft geradezu verheerend aus.

Wurzelziehen muß man bei Vergleichsberechnungen (Renditerechnungen). Ein Beispiel: Ihre Sparkasse zahlt Ihnen auf Ihr eingezahltes Kapital sieben Jahre lang 4% Zinsen sowie am Ende des 7. Jahres eine einmalige Prämie von 20% des Anfangskapitals. "Rentiert" sich das für Sie? Sie beantworten diese Frage für sich durch Lösen der Aufgabe: Zu welchem Zinsfuß p müßte die Sparkasse Ihr Geld jährlich verzinsen, um (ohne Sonderprämie) zu demselben Sparergebnis zu gelangen? Nun, für $q = 1 + \frac{p}{100}$ muß gelten:

$$\begin{aligned} K_0 q^7 &= K_0 \cdot 1,04^7 + K_0 \cdot 0,2 = K_0(1,04^7 + 0,2), \\ q^7 &= 1,04^7 + 0,2 = 1,516, \\ q &= \sqrt[7]{1,516} = 1,061 \end{aligned}$$

Das heißt, $p = 6,1\%$. So toll ist das Angebot der Sparkasse also gar nicht.

2 Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktionen beschreiben natürliche Wachstums- und Zerfallsprozesse (Wirtschaftswachstum, Bevölkerungs“explosion”, Lichtabsorption, Radioaktivität etc.) Es sind monotone Funktionen mit der besonderen Eigenschaft, daß das (Wachstums- bzw. Zerfalls-) Ergebnis zum Zeitpunkt t proportional zu der Anfangsmenge zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Wenn sich also aus *einer* Mengeneinheit (ME) im Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt t etwa $e(t)$ ME entwickelt haben, so ergeben sich aus m_0 ME entsprechend $m_0 \cdot e(t)$ ME.

Das hat zur Folge: Eine ME entwickelt sich von $t = 0$ bis $t = t_1$ zu $e(t_1)$ ME, von $t = t_1$ bis $t = t_1 + t_2$ dann zu $e(t_1)e(t_2)$ ME. Das muß natürlich mit dem Ergebnis $e(t_1 + t_2)$ übereinstimmen. Wir suchen also die *monotonen* Funktionen e auf der Menge $\mathbb{R}_+$ der nichtnegativen reellen Zahlen mit der Eigenschaft:

2.1 $e(t_1 + t_2) = e(t_1) \cdot e(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ (gelesen: “Für alle t_1, t_2 aus $\mathbb{R}_+$”).

Es gibt solche Funktionen: Die Konstante 0 und die Konstante 1 sind offenbar von dieser Art. Sie sind aus praktischer Sicht völlig uninteressant. Generell muß (wegen 2.1) gelten:

$$e(0) = e(0 + 0) = e(0)e(0),$$

was nur die beiden Möglichkeiten $e(0) = 0$ bzw. $e(0) = 1$ zuläßt. Wegen

$$e(t) = e(0 + t) = e(0)e(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

kommt im Falle $e(0) = 0$ als Funktion e nur die Konstante 0 infrage.

Uns interessiert daher nur der Fall $e(0) = 1$. Je nachdem ob dann die Zahl $a := e(1)$ größer oder kleiner als 1 ist, ist die Funktion e monoton wachsend bzw. fallend.

Wegen der Beziehung

$$e(t) = e(2 \cdot \frac{t}{2}) = e(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = e(\frac{t}{2}) \cdot e(\frac{t}{2}) = e(\frac{t}{2})^2$$

hat die Funktion e keine negativen Werte. Insbesondere ist $a \geq 0$.

Für jede positive natürliche Zahl n (und $t \in \mathbb{R}_+$) muß gelten:

$$e(nt) = e(t + \ldots + t) = e(t)e(t)\ldots e(t) = e(t)^n,$$

$$e(t) = e(n \cdot \frac{t}{n}) = e(\frac{t}{n})^n \text{ also: } e(\frac{t}{n}) = \sqrt[n]{e(t)}$$

Insbesondere muß für jede positive rationale Zahl $r = \frac{m}{n}$ gelten:

$$e(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \text{ kurz:}$$

2.2 $e(r) = a^r$ für alle rationalen $r \geq 0$.

Der Fall $a = 0$ führt in Verbindung mit der Monotoniebedingung zu der (uninteressanten) Lösung

$$e(0) = 1, e(t) = 0 \text{ für } t > 0$$

Es gilt der grundsätzliche Existenz- und Einzigkeitssatz:

2.3 Satz: Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es genau eine monotone Funktion $e_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$e_a(r) = a^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}_+.$$

□

Beweis: Auf der Menge $\mathbb{Q}_+$ der nichtnegativen rationalen Zahlen ist e_a durch $e_a(0) = 1$ und 2.2 festgelegt.

Jetzt sei t irgendeine positive reelle Zahl. Wie ist $e_a(t)$ zu definieren?

Im Falle $a = 1$ ist das klar: Wegen $1^r = 1$ für jede rationale Zahl r muß wegen der Monotonie von e_a auch $e_a(t) = 1$ sein. Im Fall $a \neq 1$ betrachten wir die beiden Zahlenmengen

$$M = \{a^r : r \text{ rational}, \quad r \leq t\}, \qquad N = \{a^r : r \text{ rational}, \quad r > t\}.$$

Sie haben zwar kein Element gemeinsam, liegen aber auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ "direkt nebeneinander", und zwar liegt M links bzw. rechts von N je nachdem, ob $a > 1$ oder $a < 1$ ist. Da $\mathbb{R}$ keine "Lücken" hat – die Grundeigenschaft der Zahlengeraden! –, gibt es genau eine reelle Zahl y zwischen M und N. Nur diese kommt wegen der Monotoniebedingung als Wert $e_a(t)$ von e_a an der Stelle t infrage.

Es muß natürlich gezeigt werden, daß die so definierte Funktion e_a die verlangten Eigenschaften besitzt, was wir uns schenken wollen. □

Um zum Ausgang zurückzukehren, muß schließlich auch noch gezeigt werden, daß e_a die Regel 2.1 erfüllt. Auch das macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Die an den Einzelheiten Interessierten verweisen wir auf das Lehrbuch Reiffen/Trapp: Einführung in die Analysis, Universitätsverlag Osnabrück 1999, §10. Wir halten fest:

2.4 Satz: Zu jeder positiven reellen Zahl a gibt es genau eine monotone Funktion e_a auf $\mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften $e_a(1) = a$ und

$$e_a(t_1 + t_2) = e_a(t_1)e_a(t_2) \text{ für } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Für natürliche Zahlen m und $n > 0$ gilt: $e_a(\frac{m}{n}) = (\sqrt[n]{a})^m$. □

Für $t_1 \geq t_2 \geq 0$ liefert obige Regel:

$$e(t_1) = e(t_1 - t_2 + t_2) = e(t_1 - t_2)e(t_2),$$

2.5 $e(t_1 - t_2) = \frac{e(t_1)}{e(t_2)}$.

Dementsprechend setzen wir die Definition von e_a auf ganz $\mathbb{R}$ fort:

2.6 $e_a(-t) := \frac{1}{e_a(t)}$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß e_a dann auf ganz $\mathbb{R}$ monoton ist und die Rechenregeln 2.1, 2.5 und 2.6 erfüllt.

2.7 Definition: Die zu der positiven reellen Zahl a gemäß 2.4 und 2.6 definierte Funktion e_a auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ heißt die *Exponentialfunktion* zur *Basis* a. – Wir *schreiben*:

$$a^t := e_a(t) \text{ für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

□

In dieser Schreibweise kann man sich die *allgemeinen Potenzrechenregeln* leicht merken:

2.8 Es seien a und b positive reelle Zahlen. Für beliebige reelle Zahlen s und t gilt dann:

1. $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$, $\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$;
2. $(a^s)^t = a^{st}$;
3. $a^t \cdot b^t = (a \cdot b)^t$, $\frac{a^t}{b^t} = (\frac{a}{b})^t$.

□

Beweis: Die erste Regel gibt ja nur in neuer Schreibweise die alten Regeln 2.1 und 2.5 wieder. Die zweite Regel beweisen wir mit 2.3: Für festes $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$f(t) := a^{st} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f wie e_a monoton (im Falle $s < 0$ sind "fallend" und "wachsend" zu vertauschen!). Es gilt:

$$f(0) = a^0 = e_a(0) = 1, \quad f(1) = a^s.$$

Für natürliche Zahlen m und $n > 0$ gilt:

$$f(\frac{m}{n})^n = e_a(\frac{m}{n} \cdot s)^n = e_a(ms) = e_a(s)^m = (a^s)^m, f(\frac{m}{n}) = (\sqrt[n]{a^s})^m.$$

Daher muß f mit der Funktion e_{a^s} übereinstimmen! Das heißt:

$$a^{st} = (a^s)^t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die zweite Regel bewiesen. Zum Beweis der dritten verwenden wir ein $s_0 \in \mathbb{R}$ mit $b = a^{s_0}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a^t \cdot b^t &= a^t \cdot a^{s_0 t} && \text{(Regel 2)} \\ &= a^{t + s_0 t} && \text{(Regel 1)} \\ &= a^{(1+s_0)t} = (a^{1+s_0})^t = (a \cdot a^{s_0})^t = (a \cdot b)^t. \end{aligned}$$

Als Anwendung folgt:

$$(\frac{a}{b})^t \cdot b^t = (\frac{a}{b} \cdot b)^t = a^t, (\frac{a}{b})^t = \frac{a^t}{b^t}.$$

□

Zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen ist die Exponentialfunktion zur Basis 2 gut geeignet.

2.9 Ein *exponentielles Wachstum* wird beschrieben durch

$$f(t) = m_0 \cdot 2^{ct} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dabei ist m_0 die *Anfangsmenge* (zum Zeitpunkt $t = 0$), $e(t)$ die Menge zum Zeitpunkt t. Der *Wachstumskoeffizient* $c > 0$ definiert die *Doppelwertzeit* $t_0 := \frac{1}{c}$, in der die vorhandene Menge auf das Doppelte wächst. □

2.10 Ein *exponentieller Zerfall* wird beschrieben durch

$$f(t) = m_0 \cdot 2^{-ct} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Auch hier ist m_0 die *Anfangsmenge* (zum Zeitpunkt $t = 0$), $e(t)$ die Menge zum Zeitpunkt t. Der *Zerfallskoeffizient* $c > 0$ definiert hier die *Halbwertzeit* $t_0 := \frac{1}{c}$, in der die vorhandene Menge auf die Hälfte abnimmt. □

Ergänzung

Normalerweise verwendet man nicht die Exponentialfunktion zur Basis 2, sondern die zur Basis $e = 2,718281828\cdots$ (*Eulersche Zahl*).

Dazu die folgenden Betrachtungen!

Ein Kapital K_0 wächst bei $p\%$ Zins pro Jahr um den Faktor $q = 1 + x$, mit der Abkürzung $x = \frac{p}{100}$, in n Jahren auf

$$K_n = K_0 q^n \quad \text{(vgl. 1.21)}$$

Günstiger als eine solche Spareinlage sind i.a. *Termineinlagen* mit kürzerer Anlagezeit als ein Jahr und entsprechend anteiliger Verzinsung:

In $\frac{1}{m}$ des Jahres beträgt der anteilige Zins $\frac{x}{m}$; am Jahresende ist das eingesetzte Kapital um den Faktor $q_m = (1 + \frac{x}{m})^m$ gewachsen. Nach dem Binomialtheorem 1.6 ist

$$q_m = 1 + x + \binom{m}{2}\frac{x^2}{m^2} + \binom{m}{3}\frac{x^3}{m^3} + \cdots + \frac{x^m}{m^m}$$

und damit q_m im Falle $m \geq 2$ größer als der normale Aufzinsungsfaktor $1+x$ (vorausgesetzt natürlich: $x > 0$).

Gemäß 1.8 gilt nun für die einzelnen Summanden:

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!m^k} = \frac{m}{m}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-k+1}{m}\frac{1}{k!}$$

$$= (1 - \frac{1}{m})\cdots(1 - \frac{k-1}{m})\frac{1}{k!}$$

Entsprechend gilt bei q_{m+1}:

$$\binom{m+1}{k}\frac{1}{(m+1)^k} = (1 - \frac{1}{m+1})\cdots(1 - \frac{k-1}{m+1})\frac{1}{k!}$$

Das ist "etwas" größer als $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k}$; und q_{m+1} hat einen Summanden mehr als q_m. Folglich ist q_{m+1} größer als q_m; die Verzinsung verbessert sich also bei Verkürzung der Anlagezeit. Sie wächst – bedauerlicherweise – nicht "ins Unendliche". Denn wegen der letzten Gleichung ist

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ für } k \geq 2 \text{ und damit}$$

$$q_m < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2} + \cdots \frac{x^m}{2^{m-1}} = 1 + x(1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 \cdots + (\frac{x}{2})^{m-1})$$

Mit der Formel 1.4 für die geometrische Summe folgt (für $0 \leq x < 2$):

$$q_m < 1 + x\frac{1-(\frac{x}{2})^m}{1-\frac{x}{2}} < 1 + \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2+x}{2-x}.$$

Die streng monoton wachsende Folge der q_m ist also nach oben beschränkt. Das gilt zunächst nur für $0 \leq x < 2$. Im Falle $x \geq 2$ wählen wir eine natürliche Zahl $n > \frac{x}{2}$. Dann ist $\frac{x}{n} < 2$ und damit

$$q_m\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{2+\frac{x}{n}}{2-\frac{x}{n}} = \frac{2n+x}{2n-x}.$$

Es folgt für $(q_m(\frac{x}{n}))^n = (1+\frac{x}{mn})^{mn} = q_{mn}(x)$:

$$q_{mn}(x) < \left(\frac{2n+x}{2n-x}\right)^n.$$

Wegen $q_m(x) < q_{mn}(x)$ ist darum erst recht

$$q_m(x) < \left(\frac{2n+x}{2n-x}\right)^n \text{ (für } 0 < x < 2n).$$

Also ist die Folge der q_m in jedem Fall nach oben beschränkt. Der Grenzwert

2.11 $q(x) = kloS\{q_m : m \in \mathbb{N}^*\}$

ist die kleinste obere Schranke der Zinsfaktoren q_m, also gewissermaßen das Optimum, das man durch "stetige Verzinsung" erreichen kann.

2.12 Die Funktion q ist monoton wachsend, $q(0) = 1$. Für rationale $x \geq 0$ ist

$$q(x) = e^x, \text{ mit } e := q(1).$$

□

Beweis: Für jede positive natürliche Zahl m und $x \leq y$ aus $\mathbb{R}_+$ ergibt sich aus der Definition von q_m und q direkt

$$q_m(x) \leq q_m(y) \leq q(y).$$

Daher ist auch $q(x) \leq q(y)$. Also ist q monoton wachsend. Für $x = 0$ ist $q_m = 1$ und daher auch $q(0) = 1$. Für jede natürliche Zahl k ist

$$q_{km}(k) = (1+\frac{k}{km})^{km} = (1+\frac{1}{m})^{km} = ((1+\frac{1}{m})^m)^k = q_m(1)^k$$

Es folgt:

$$q(k) = q(1)^k = e^k.$$

Sind k und $l > 0$ natürliche Zahlen, so gilt für $x = \frac{k}{l}$

$$q_m(x)^l = ((1 + \frac{k}{lm})^m)^l = (1 + \frac{k}{lm})^{ml} = q_{lm}(k)$$

Es folgt:

$$q(x)^l = q(k) = e^k, q(x) = e^{\frac{k}{l}} = e^x.$$

□

Gemäß 2.4 und 2.12 stimmt die "Zinsfunktion" q mit der Exponentialfunktion e_e zur Basis $e = q(1)$ überein, also mit

2.13 $e = kloS\{(1 + \frac{1}{m})^m : m \in \mathbb{N}^*\}$.

Für die so definierte *Eulersche Zahl* e gilt nach unseren Überlegungen:

$$q_1(1) < e \leq \frac{2+1}{2-1}, \qquad \text{also } 2 < e \leq 3.$$

Aus der schönen Formel 2.13 läßt sich e nur mit enormem Rechenaufwand berechnen, weil die Folge $((1 + \frac{1}{m})^m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ extrem langsam konvergiert.

Ausgehend von unseren Überlegungen kann man zeigen (7.3), daß e^x mit dem Grenzwert der Folge der Summen

$$E_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$$

übereinstimmt; wir bezeichnen ihn mit dem Symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Ihn kann man sehr viel leichter berechnen, da man den "Fehler" $|e^x - E_m(x)|$ sehr gut kontrollieren kann. Für $m = 12$ erhält man z.B. für e bereits den Näherungswert $e = 2,718281828$ (vgl. R/T S. 142f).

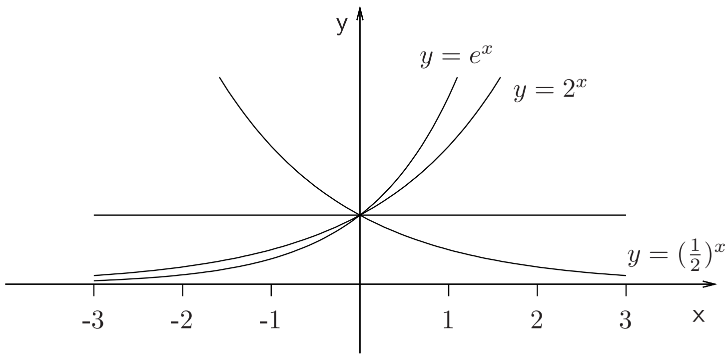
Die *natürliche Exponentialfunktion* zur Basis e wird in der Regel in der Literatur mit *exp* bezeichnet.

3 Logarithmen

Beim Beweis der allgemeinen Potenzrechenregeln (2.8) benötigten wir, daß man zu gegebenen positiven reellen Zahlen a und b stets eine reelle Zahl s_0 wählen kann, derart daß $b = a^{s_0}$ ist.

Im Falle $a = 1$ und $b \neq 1$ gibt es ein solches s_0 bestimmt nicht, weil ja $1^s = 1$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt. "Zum Glück" ist die betreffende Regel 2.8.1 in diesem Sonderfall $a = 1$ trivialerweise richtig. Im Falle $a \neq 1$ gibt es zu jedem positiven b genau ein s_0 mit $a^{s_0} = b$. Denn es gilt:

3.1 Satz: Die Exponentialfunktion e_a ist im Falle $a > 1$ streng monoton wachsend, d.h. $a^s < a^t$ für $s < t$ aus $\mathbb{R}$, im Falle $0 < a < 1$ streng monoton fallend, d.h. $a^s > a^t$ für $s < t$ aus $\mathbb{R}$. Ihre Werte sind die positiven reellen Zahlen. $\square$



Beweis: Wir behandeln den Fall $a > 1$. Der Fall $0 < a < 1$, also $b := \frac{1}{a} > 1$, folgt dann daraus wegen $a^t = \frac{1}{b^t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ (2.8, 3).

Zu positivem t wähle man eine positive natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} \leq t$. Dann ist $1 < \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \leq a^t$. Für beliebige s und t mit $s < t$ folgt (2.8, 1):

$$a^t = a^{t-s+s} = a^{t-s} a^s > a^s \quad \text{(wegen } a^{t-s} > 1).$$

Im betrachteten Fall ($a > 1$) wächst e_a wegen (1.6)

$$a^n = (1 + a - 1)^n = 1 + n(a-1) + \ldots + (a-1)^n > n(a-1)$$

mit wachsenden t über jede Schranke hinaus.

Insbesondere sind für jede positive Zahl b die Mengen

$$K := \{r \in \mathbb{Q} : a^r \leq b\} \subset \mathbb{Q} \text{ und } L := \{r \in \mathbb{Q} : a^r > b\} \subset \mathbb{Q}$$

nicht leer. Wegen der strengen Monotonie von e_a liegt die Menge K links von der Menge L (ohne gemeinsamen Punkt).

Weil $\mathbb{R}$ "lückenlos" ist, gibt es genau eine reelle Zahl s_0 zwischen K und L. Für sie gilt dann (nach Definition von e_a): $e_a(s_0) = b$. □

Als streng monotone Funktion besitzt e_a eine im gleichen Sinne streng monotone Umkehrfunktion. Ihr Definitionsbereich ist die Menge $\mathbb{R}_+^*$ der positiven reellen Zahlen.

3.2 Definition: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e_a ($0 < a$ und $a \neq 1$) heißt der *Logarithmus* zur *Basis* a. Wir bezeichnen diese Funktion mit dem Symbol $\log_a$. □

Definitionsgemäß gilt also für $s \in \mathbb{R}$ und positives $t \in \mathbb{R}$:

3.3 $\quad s = \log_a t \quad \Leftrightarrow \quad t = a^s.$

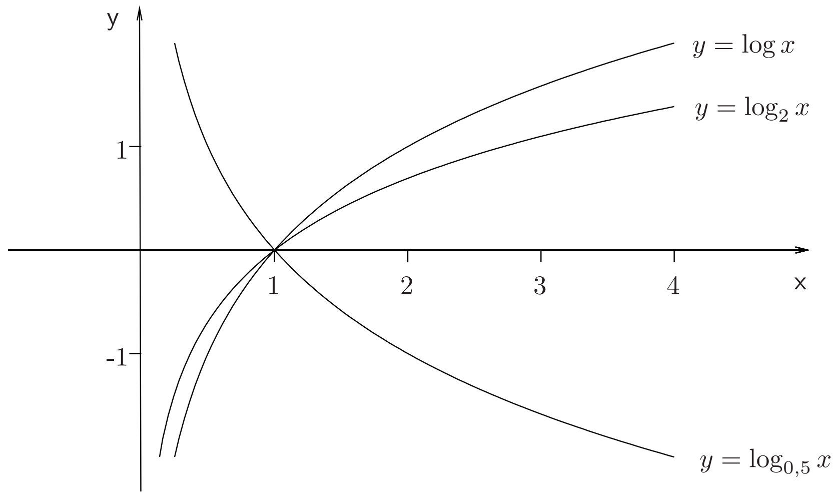
So ist z.B. $\log_5 0,04 = -2$, denn $5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$.

Wegen $e_a(0) = 1$ ist stets $\log_a 1 = 0$; wegen $e_a(1) = a$ ist stets $\log_a a = 1$.

Da $\log_a$ die Umkehrfunktion von e_a ist, übertragen sich natürlich die entsprechenden Regeln und Eigenschaften.

Aus 3.1 folgt:

3.4 Satz: Der Logarithmus $\log_a$ ist auf der Menge $\mathbb{R}_+^*$ der positiven reellen Zahlen definiert. Seine Werte sind die reellen Zahlen. Im Falle $a > 1$ ist $\log_a$ streng monoton wachsend, im Falle $0 < a < 1$ streng monoton fallend. □



Aus 2.8.1 folgt die grundlegende *Rechenregel:*

3.5 Für positive reelle Zahlen x, y gilt stets:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

$\square$

Multiplikation und Division werden somit auf die Addition bzw. Subtraktion zurückgeführt. Darauf beruht der altbewährte *Rechenschieber*, der in der Mitte des 17. Jahrhunderts eingeführt wurde und erst in den letzten Jahren durch den elektronischen Taschenrechner verdrängt worden ist.

Die Regel 2.8.2 zeigt uns, wie man die Exponentialfunktionen und Logarithmen zu verschiedenen Basen verrechnet:

3.6 Seien $a \neq 1$ und $b \neq 1$ positive reelle Zahlen. Dann gilt:

1. $b^t = a^{ct}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, mit $c := \log_a b$;
2. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ für jedes $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\square$

Beweis: Für $c := \log_a b$ gilt (gemäß 3.3): $b = a^c$. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt dann (gemäß 2.8.2): $b^t = (a^c)^t = a^{ct}$.

Für $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt dann (wieder gemäß 3.3):

$$t = \log_b x \Leftrightarrow x = b^t = a^{ct} \Leftrightarrow ct = \log_a x.$$

Durch Einsetzen folgt die zweite Regel. $\square$

Im Prinzip käme man also mit *einer* Exponentialfunktion und der zugehörigen Logarithmusfunktion aus. So verwendet man in der Regel die "natürliche Exponentialfunktion" exp und den zugehörigen "natürlichen Logarithmus" $\log_e =: \ln$, den man heute auch einfach mit log bezeichnet. Damit gilt:

3.6 spezial: Für positives $a \neq 1$ ist

1. $a^t = e^{t \ln a} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,
2. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\square$

Entsprechend beschreibt man Wachstums- und Zerfallsprozesse (vgl. 2.9 bzw. 2.10) üblicherweise durch die Funktion

$$f(t) = m_0 e^{ct} \text{ bzw. } f(t) = m_0 e^{-ct} \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

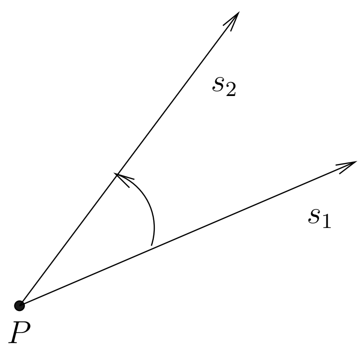
wobei dann $t_0 = \frac{\ln 2}{c}$ die Doppel- bzw. die Halbwertzeit angibt.

4 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen oder Winkelfunktionen sind Unterrichtsgegenstand der Klasse 9. Im Rahmen der Kurse über Differential- und Integralrechnung wird ihre Behandlung wieder aufgenommen.

Die Beschäftigung mit den Winkelfunktionen setzt die Kenntnis des Winkelbegriffs voraus.

4.1 Definition: Unter einem *Winkel* verstehen wir ein Paar (s_1, s_2) von Strahlen s_1, s_2, die von einem Punkt P, dem *Scheitel* des Winkels, ausgehen. Die Strahlen s_1, s_2 heißen die *Schenkel* des Winkels. □

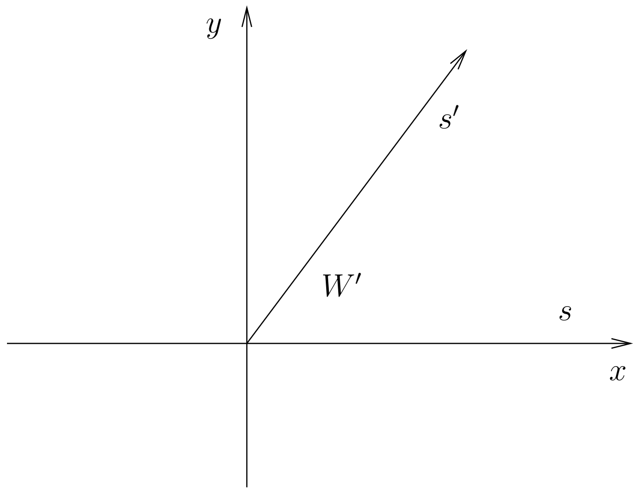


Natürlich ist der Winkel (s_1, s_2) von dem Winkel (s_2, s_1) zu unterscheiden!

Der *Nullwinkel*, mit $s_1 = s_2$, sowie der *gestreckte Winkel*, bei dem s_1 und s_2 eine Gerade bilden, sind spezielle Winkel. Ein weiterer besonderer Winkel ist der *rechte Winkel*; er liegt vor, wenn s_2 zusammen mit seinem Spiegelbild bzgl. s_1 eine Gerade bildet.

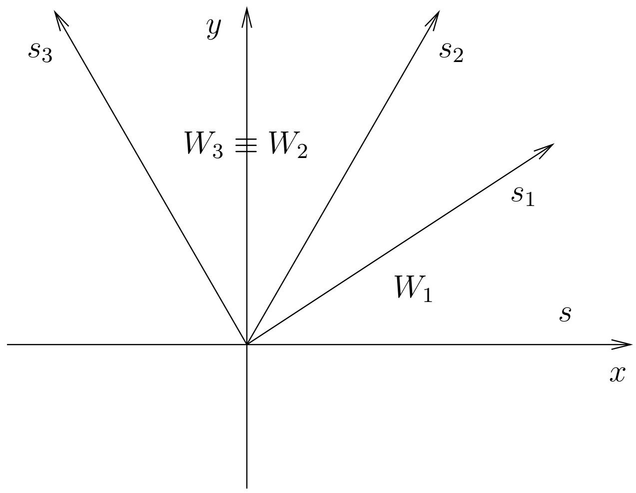
Ein Winkel $W = (s_1, s_2)$ mit dem Scheitel P sowie ein Punkt Q mit einem von Q ausgehenden Strahl $s_1^{'}$ seien vorgegeben. Dann kann man P durch eine Verschiebung (Translation) mit Q und s_1 durch eine anschließende Drehung mit $s_1^{'}$ zur Deckung bringen. Wir erhalten einen zu W *kongruenten* Winkel $W^{'} = (s_1^{'}, s_2^{'})$. Wir sagen, $W^{'}$ sei aus W durch *Abtragen* von W an $s_1^{'}$ entstanden, wir *schreiben*: $W \equiv W'$.

Wir denken uns nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene zugrundegelegt. Im weiteren sei dann Q der Nullpunkt 0 des Koordinatensystems, s die positive x-Achse. Dann ist jeder Winkel W der Ebene kongruent zu einem Winkel $W^{'} = (s, s^{'})$, wobei $s^{'}$ ein von 0 ausgehender Strahl ist. Auf diese Weise ist jeder Winkel W der Ebene, bis auf Kongruenz, genau durch einen derartigen Strahl $s^{'}$ festgelegt. Indem wir jeden Winkel durch den zu ihm kongruenten Winkel $(s, s^{'})$ repräsentieren, wird die Einführung von Winkeladdition möglich.



4.2 Definition: Gegeben seien die beiden Winkel $W_1 = (s, s_1)$ und $W_2 = (s, s_2)$. Ist $W_3 = (s_1, s_3)$ der durch Abtragen von W_2 an s_1 gewonnene Winkel, so nennen wir den Winkel (s, s_3) die *Summe* von W_1 und W_2. Wir *bezeichnen* sie einfach mit $W_1 + W_2$. □

Man macht sich sofort klar, daß $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$ ist. Es ist auch klar, was unter dem n-fachen $n \cdot W$ eines Winkels W zu verstehen ist ($n \in \mathbb{N}$).

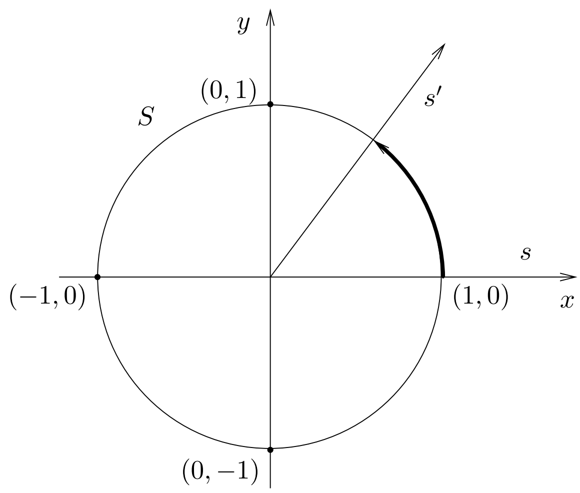


Nicht ganz so einfach ist der Nachweis, daß zu jedem Winkel W und jeder positiven natürlichen Zahl n ein Winkel W' existiert, derart daß $n \cdot W'$ gleich W ist.

Dem vom Nullwinkel (s, s) verschiedenen Winkel $W_0 = (s, s_0)$, für den s_0 im ersten Quadraten liegt (d.h. für alle $(x, y) \in s_0 \setminus 0$ ist $x > 0, y > 0$)

wie auch $n \cdot W_0$ für $1 < n < 90$, aber $90 \cdot W_0$ der rechte Winkel $(s, s^{\perp})$ mit $s^{\perp} := \{(0, y) : y \geq 0\}$ ist, ordnen wir das *Gradmaß* 1^0 zu. In naheliegender Weise sind dann Winkel von α^0 definiert, wobei α eine rationale Zahl zwischen 0 und 360 ist. Durch Approximation werden dann auch Winkel von α^0 für irrationales α zwischen 0 und 360 definiert.

Eine andere naheliegende Einführung von Winkelmaßen geschieht wie folgt. Man betrachtet die Einheitskreislinie S; das ist die Kreislinie mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt 0. Die Winkel $W = (s, s^{'})$ stehen dann in eindeutiger Beziehung zu den Schnittpunkten $s^{'} \cap S$ und diese sind durch die Länge des gegen den Uhrzeiger durchlaufenen Kreisbogens von $s \cap S = \{(1, 0)\}$ bis zum Schnittpunkt $s^{'} \cap S$ genau festgelegt. Auf diese Weise ergibt sich das *Bogenmaß* für Winkel; es variiert zwischen 0 und 2π. Es ist nicht üblich, dabei die Längeneinheit in der Ebene (etwa cm) zu notieren, weil die Größe des Bogenmaßes eines Winkels nicht von der gewählten Längeneinheit abhängt. Hat ein Winkel W das Gradmaß α und das Bogenmaß β, so gilt offensichtlich die Beziehung $\frac{\alpha}{360} = \frac{\beta}{2\pi}$, also $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$.



(Daß die Länge des Halbkreisbogens mit dem Flächeneinhalt π der Einheitskreisscheibe übereinstimmt, zeigt eine leichte, anschaulich naheliegende Überlegung. Wir nehmen im übrigen hinsichtlich der "Maßbegriffe" *Flächeninhalt* und *Bogenlänge* einen durch die Anschauung begründeten naiven Standpunkt ein; d.h. wir kümmern uns hier nicht um ihre exakte "maßtheoretische" Begründung.)

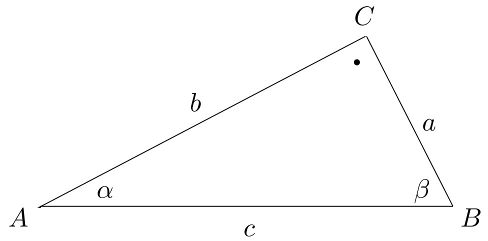
Wir sind nun in der Lage, die Winkelfunktionen zu definieren.

4.3 Definition: Wir betrachten ein Dreieck mit rechtem Winkel bei C; a, b, c

seien die Kantenlängen und α sei das Maß des Winkels bei A. Dann ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

(sin, cos, tan, cot werden "Sinus", "Cosinus", "Tangens", "Cotangens" gelesen.) □



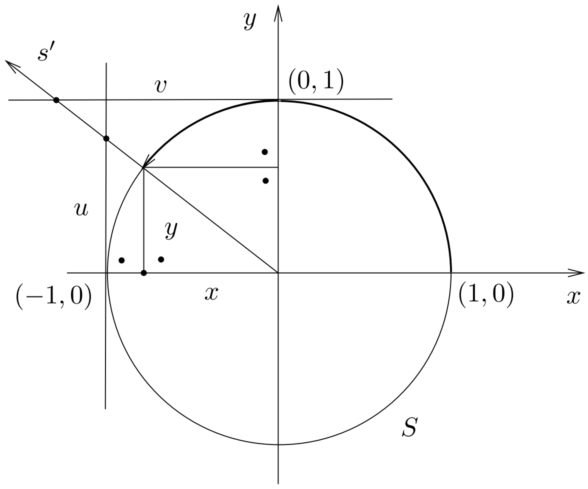
Natürlich muß man sich hinsichtlich des Winkelmaßes (Gradmaß oder Bogenmaß) festlegen. Aufgrund der Strahlensätze hängen die Seitenverhältnisse nur von α ab; d.h. die Definition 4.3 ist vernünftig.

Der Definitionsbereich der Winkelfunktionen gemäß 4.3 ist das Intervall $\{\alpha \in \mathbb{R} : 0 < \alpha < \alpha_1\}$, wobei $\alpha_1 = 90^0$ bzw. $\frac{\pi}{2}$ ist. Man erhält größere Definitionsbereiche, wenn man die Winkelfunktionen mit Hilfe des Einheitskreises definiert; dabei gerät man natürlich nicht in Widerspruch zu 4.3.

4.4 Definition: Entsprechend nachfolgender Zeichnung definieren wir:

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x; \quad \tan\alpha = u, \quad \cot\alpha = v.$$

□



Dabei bezeichnet (x, y) den Schnittpunkt des "Schenkels" s' mit S, $(-1, u)$ bzw. $(v, 1)$ die Schnittpunkte von s' mit der "Tangente" an S' im Punkte (-1,0) bzw. (0,1). Insbesondere sind x, y, u, v mit einem Vorzeichen versehen; im unseren Bespiel sind x und v negativ, während y und u positiv sind.

Die Winkelfunktionen sind damit für $0 \leq \alpha < 360°$ bzw. 2π (Grad- bzw Bogenmaß) definiert, wobei Tangens für $\alpha = 90°$ und $270°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ sowie Cotangens für $\alpha = 0°$ und $180°$ bzw. 0 und π nicht definiert ist.

Natürlich haben die Winkelfunktionen eine sehr große Bedeutung für geometrische Rechnungen am Dreieck. Wir geben die beiden wichtigsten geometrischen Lehrsätze für die Winkelfunktionen an.

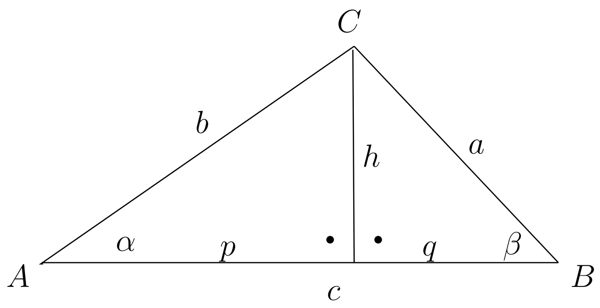
4.5 Satz: Vorgegeben sei ein (nicht notwendig rechtwinkliges) Dreieck mit den Kantenlängen a, b, c; mit α, β, γ seien die Maße der jeweiligen Winkel bezeichnet. Dann gilt:

(1) Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}; \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma};$

(2) Cosinussatz:
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

□

Beweis: Wir beweisen exemplarisch jeweils die erste Formel für ein Dreieck mit Winkeln $\alpha, \beta < 90°$ (bzw. $\pi/2$).



Mit h sei die Länge des Lotes von C auf die Strecke AB bezeichnet; der Fußpunkt zerlegt AB in Stücke der Länge p bzw q. Es gilt (gemäß 4.3):

$$h = b\sin\alpha = a\sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + q^2 = h^2 + (c-p)^2, p = b\cos\alpha, h^2 + p^2 = b^2; \\ a^2 &= h^2 + p^2 + c^2 - 2pc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Wir wollen uns mit den *Drehungen* beschäftigen und legen, der Einfachheit halber, 0 als Drehzentrum fest. Die Drehung heißt *positiv*, wenn sie im Gegenuhrsinn verläuft, andernfalls *negativ*. Ein Maß für die Drehung erhalten wir, wenn wir ein zweites Exemplar von s - wir bezeichnen es mit s_0 - betrachten und dieses im Sinn der Drehung als Zeiger bewegen. s_0 überstreicht auf S einen Bogen, dessen Länge α ein Bogenmaß der Drehung ist. Dabei zählen wir α negativ, wenn die Drehung negativ ist. Mit Hilfe der Formel $\beta = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$ erhalten wir formal eine Beschreibung der Größe in Gradmaß. In diesem Sinne ist eine Drehung, etwa um -3π bzw. $-540°$, zu verstehen.

Die Endposition von s_0 bei einer Drehung zeichnet einen Punkt P auf S aus. Bezeichnet α das Maß der Drehung, so definiert man analog zu 4.4 die Winkelfunktionen zu α, und damit auf der ganzen Zahlengeraden $\mathbb{R}$.

Aufgrund der Definition der Winkelfunktionen sowie aus unmittelbar einsichtigen geometrischen Gründen gelten folgende Formeln; dabei gehen wir von nun an vom Bogenmaß aus.

4.6 Satz: Für jede reelle Zahl α und ganze Zahl k gilt:

1. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,$
   $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha, \cot(\alpha + 2k\pi) = \cot\alpha;$
2. $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha);$
3. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$
4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
5. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$
6. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}, \quad \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}.$

$\square$

Dabei ist zu beachten, daß tan und cot nicht für alle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert sind.

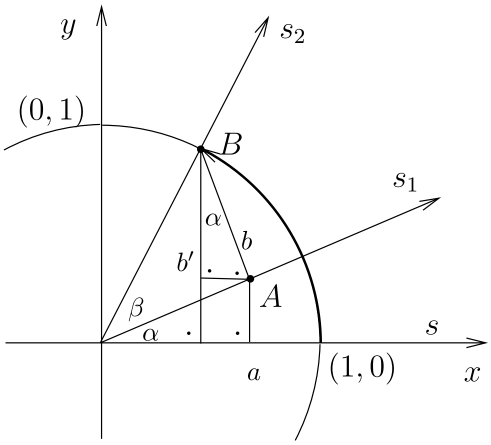
Zwischen den Winkelfunktionen bestehen über 4.6 hinaus sehr viele weitere Funktionalgleichungen. Besonders wichtig sind die folgenden

4.7 Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

□

Beweis: Wir beweisen exemplarisch die erste Formel für $\alpha, \beta > 0, \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$. b ist die Länge des Lotes von B auf s_1, a ist die Länge des Lotes von A auf s.



Mit $|0B|, |0A|$ bezeichnen wir die Längen der entsprechenden Strecken. Dann gilt: $|0B| = 1$,

$$\sin(\alpha+\beta) = a + b^{'}, b^{'} = b\cos\alpha, b = \sin\beta$$

$$a = |0A|\sin\alpha, |0A| = \cos\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

□

Mit Hilfe von Sinus und Cosinus erhalten wir eine besondere Darstellungsmöglichkeit von Punkten der Ebene.

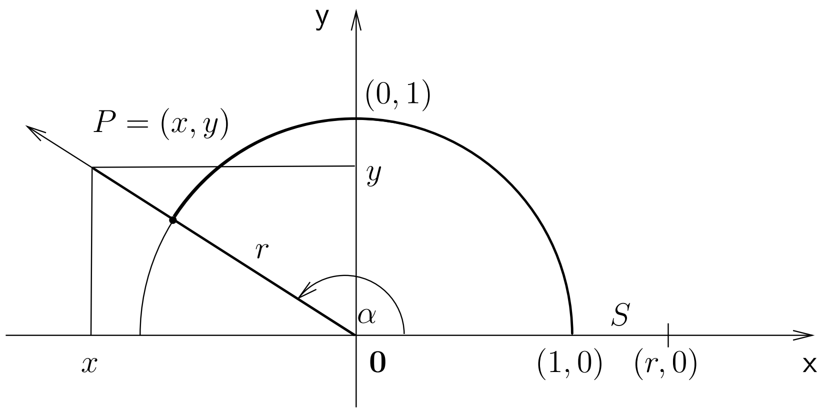
4.8 Satz über die Polarkoordinatendarstellung: Sei $P = (x, y)$ ein von 0 verschiedener Punkt der Ebene. Dann ist $r = \sqrt{x^2+y^2}$ sein Abstand von 0, und es existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $0 \leq \alpha < 2\pi$, derart daß gilt:

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha.$$

□

Die angegebene Darstellung heißt die *Polarkoordinatendarstellung* von P.

Beweis: Der Satz ergibt sich unmittelbar aus der Skizze:



Rotiert ein Punkt gleichförmig im Abstand r um $\mathbf{0}$ und vollführt er in der Zeit τ eine Volldrehung (im positiven Drehsinn), so wird seine Bahn, wenn er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt mit den Koordinaten $(r, 0)$ befindet, durch die Gleichungen

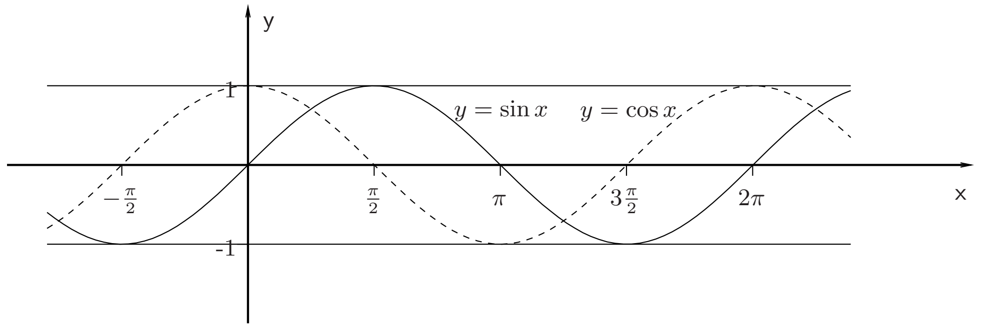
$$x = r \cos \frac{2\pi}{\tau} t, \quad y = r \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

beschrieben; $\nu := \frac{1}{\tau}$ heißt die "Frequenz" der Drehung.

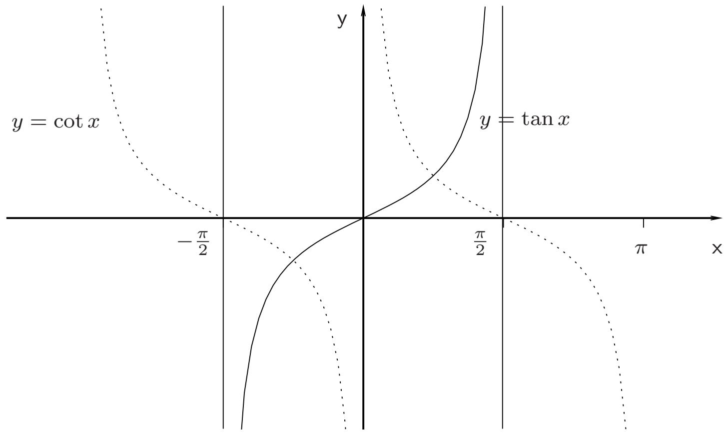
In der folgenden Tabelle sind einige Funktionswerte der Winkelfunktionen für spezielle Argumente aufgelistet. Sie ergeben sich für die Sinusfunktion gemäß Definition 4.3 durch einfache geometrische Überlegungen und für die anderen Funktionen etwa mit Hilfe von 4.6.

α					
Bogenmaß	Gradmaß	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	0	1	0	-
$\pi/6$	30	$1/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\pi/3$	60	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\pi/2$	90	1	0	-	0

Wie man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ allgemein berechnet, lernen wir in der Differentialrechnung (7.4).



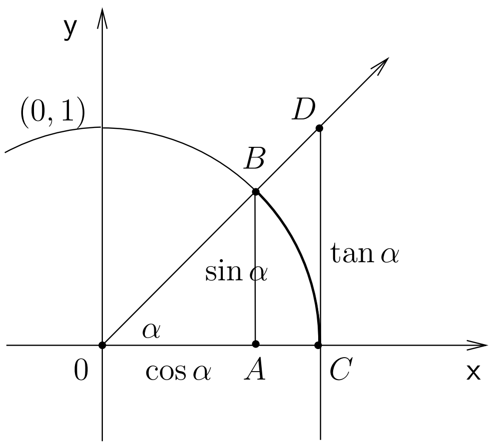
Tangens und Cotangens berechnet man (dann) als Quotienten von Sinus und Cosinus gemäß 4.6.5.



Für den späteren Gebrauch (in der Differentialrechnung) notieren wir:

4.9 Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < \alpha < \tan\alpha$. $\square$

Beweis: Man betrachte die Skizze:



Durch Vergleich der Flächeninhalte der Dreiecke $0AB, 0CD$ sowie des Kreissegmentes, welches durch B und C definiert wird, erhalten wir (π ist der Flächeninhalt der vollen Kreisscheibe):

$$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha < \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\tan\alpha.$$

$\square$

5 Differentialrechnung

Die qualitative Grundeigenschaft derjenigen Funktionen, mit denen man "rechnen" kann, ist die sog. *Stetigkeit*: Die Funktionswerte lassen sich prinzipiell mit jeder gewünschten Genauigkeit mithilfe von Näherungswerten für die Argumente berechnen.

Die formale Beschreibung der Stetigkeit ist die folgende:

5.1 Definition: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf der Teilmenge M der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ ist *im Punkte* $x_0 \in M$ *stetig*, wenn man prinzipiell zu jeder vorgegebenen *Genauigkeitsschranke* $s > 0$ für den Funktionswert $f(x_0)$ eine *Abweichungsschranke* $r > 0$ für die Argumente finden kann, derart daß für jedes $x \in M$, für das $|x - x_0| < r$ ist, gilt: $|f(x) - f(x_0)| < s$.

Ist f in jedem Punkt von M stetig, so heißt f *stetig* (auf M). □

Mit Hilfe der formalen Definition kann man bei einfachen *Beispielen*, wie den Konstanten, der Funktion x, der Betragsfunktion $|\mathsf{x}|$, leicht die Stetigkeit nachweisen.

Leicht ist auch der Nachweis der *Rechenregeln:* Summe, Differenz, Produkt und (soweit definiert) Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetig.

Damit ergeben sich aus den genannten einfachen Beispielen viele weitere Beispiele stetiger Funktionen, wie die *Potenzfunktionen* x^k $(k \in \mathbb{Z})$, die *Polynome*

$$c_n\mathsf{x}^n + c_{n-1}\mathsf{x}^{n-1} + \ldots + c_1\mathsf{x} + c_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sowie die Quotienten aus ihnen, die sog. *rationalen Funktionen.*

Sehr leicht ist der Nachweis der *Kettenregel:* Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die aus zwei stetigen Funktionen f_1, f_2 zusammengesetzt ist, d. h.

$$f(x) = f_1(f_2(x)) \text{ für jedes } x \in M,$$

ist wiederum stetig. Wir schreiben übrigens: $f = f_1 \circ f_2$ (gelesen: In f_1 eingesetzt f_2). □

Nicht schwer ist der Beweis des *Monotoniesatzes:* Ist bei einer *monotonen* Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ das *Bild* $\{f(x) : x \in M\} =: f(M)$ ein Intervall (also ohne "Lücken"), so ist f stetig. □

Z. B. sind daher die Exponentialfunktionen stetig; denn ihr Bild $f(\mathbb{R})$ ist das Intervall $\mathbb{R}_+^*$ (falls die Basis $a \neq 1$ ist).

Der Monotoniesatz hat zur Folge: Die *Umkehrfunktion* jeder streng monotonen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I ist automatisch stetig (auf ihrem Definitionsbereich $f(I)$).

Daher sind die Logarithmusfunktionen stetig; sie sind ja die Umkehrfunktionen der (auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$) definierten, streng monotonen Exponentialfunktionen (zur Basis $a \neq 1$). Ebenso sind die *Wurzelfunktionen* $\sqrt[n]{\mathsf{x}}$ stetig, auf $\mathbb{R}$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$, auf $\mathbb{R}_+$ für gerades $n \geq 2$; sie sind die Umkehrfunktionen von x^n (auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+$). Zusammen mit der Kettenregel folgt, daß überhaupt jede *allgemeine Potenzfunktion*

$$\mathsf{x}^c = e^{c \ln \mathsf{x}} \quad (c \in \mathbb{R})$$

stetig ist (auf $\mathbb{R}_+^*$).

Die *trigometrischen Funktionen* sind natürlich auch stetig. Für den Sinus gilt (gemäß seiner Definition und im Bogenmaß)

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha| \text{ für } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Daraus folgt die Stetigkeit des Sinus im Nullpunkt $\alpha = 0$. Für den Cosinus gilt

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \text{ für } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mit den Rechenregeln und der Kettenregel folgt daraus die Stetigkeit des Cosinus im Nullpunkt. Die Stetigkeit von Cosinus und Sinus in dem beliebigen $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt dann mithilfe des Additionstheorems 4.7. Die Stetigkeit von Tangens und Cotangens folgt damit direkt aus ihrer Definition als Quotient von Cosinus und Sinus.

Stetige Funktionen auf Intervallen haben wichtige qualitative Eigenschaften. So gilt der *Zwischenwertsatz:*

5.2 Bei jeder stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I ist das Bild $f(I)$ ebenfalls ein Intervall; d. h. jede Zahl zwischen zwei Funktionswerten ist ebenfalls ein Funktionswert von f. □

Es gilt ferner der *Extremwertsatz:*

5.3 Ist das Intervall I in 5.2 beschränkt und abgeschlossen, d. h. von der Form $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a \leq x \leq b\}$, so auch das Bild $f(I)$. Das heißt, f ist beschränkt und besitzt einen kleinsten und einen größten Funktionswert. □

Diese Aussagen sind anschaulich klar; ihre Beweise aber gar nicht ganz einfach. Wir reservieren sie für Ihre spätere Vorlesung zur Analysis.

Eine wichtige Anwendung des Stetigkeitsbegriffes:

5.4 Definition: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ läßt sich im Punkte x_0 durch den *Grenzwert* y_0 *stetig ergänzen*, wenn die durch

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \neq x_0 \quad \text{aus M} \\ y_0 & \text{für} \quad x = x_0 \end{cases}$$

auf $M \cup \{x_0\}$ definierte Funktion f *in* x_0 *stetig* ist. □

Sie heißt dann eine *stetige Ergänzung* von f (in x_0), und wir *schreiben:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0. \text{ (gelesen: “Limes von } f(x) \text{ für } x \text{ gegen } x_0\text{”)}$$

Die Rechenregeln und die Kettenregel für stetige Funktionen liefern dann entsprechende “Grenzwertregeln” (Summenregel, Produktregel etc). Wir schreiben sie gar nicht erst auf.

Der Begriff der Stetigkeit berücksichtigt nicht den quantitativen Aspekt: Wie groß ist die Wertänderung beim Übergang von x_0 zu x, also relativ zu der Abweichung $x - x_0$?

Diese *relative Wertänderung* wird beschrieben durch den *Differenzenquotienten* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Praktische Beispiele: Inflationsrate, Grenzsteuersatz, Geschwindigkeit, Stromstärke etc.

Rein rechnerisch hat der Differenzenquotient den Nachteil, daß er i.a. sowohl vom Punkt x_0 als auch von der Abweichung $x - x_0$ abhängt (Obwohl man in der Wirklichkeit mit ihm rechnen muß!!).

Ein einfaches *Beispiel:*

$$f(x) = x^2 \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 = (x - x_0) + 2x_0.$$

Rechnerisch einfacher, weil er nur von dem betrachteten Punkt x_0 abhängt, ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (sofern er existiert). Er gibt die “momentane Änderungsquote” der Funktion f an der Stelle x_0 an.

5.5 Definition: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$, heißt *im Punkte* $x_0 \in M$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. Er heißt dann die *Ableitung* von f in x_0. □

In unserem Beispiel $f = \mathsf{x}^2$ ist offenbar $f'(x_0) = 2x_0$. Allgemeiner gilt:

5.6 Für jede natürliche Zahl n ist die Potenzfunkton $f = \mathsf{x}^n$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

□

Beweis: Im Falle $n = 0$, also für die Konstante $f = 1$, ist der Differenzenquotient gleich 0, erst recht also die Ableitung.

In Falle $n \geq 1$ kann man (wie im obigen Spezialfall $n = 2$) den Faktor $x - x_0$ aus $x^n - x_0^n$ "ausklammern" (vgl. 1.3):

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}).$$

Damit hat der Differenzenquotient die Darstellung:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Wir können ihn also in den Punkt x_0 "stetig fortsetzen":

$$f'(x_0) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \ldots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

□

Komplizierter ist das Beispiel der *Exponentialfunktion*:

5.7 Die Exponentialfunktion $\exp = e^{\mathsf{x}}$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und dafür ist $\exp'(0) = 1$. □

Beweis: Wir verwenden die Darstellung von $\exp = e^{\mathsf{x}}$ als "optimale Zinsfunktion" gemäß 2.11/12: Für $x \in \mathbb{R}_+$ ist

$$e^x = kloS\{q_m(x) : m \in \mathbb{N}^*\}, \text{ wobei } q_m(x) = (1 + \frac{x}{m})^m \text{ ist.}$$

Mithilfe des Binomialtheorems ergibt sich (vgl. §2) für positives x:

$$q_m(x) = 1 + x + \binom{m}{2}\frac{x^2}{m^2} + \ldots + \binom{m}{m}\frac{x^m}{m^m},$$

$$\frac{q_m(x) - 1}{x} - 1 = \binom{m}{2}\frac{x}{m^2} + \ldots + \binom{m}{m}\frac{x^{m-1}}{m^m}.$$

Aufgrund der Beziehung $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ folgt (für $0 < x < 2$):

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{q_m(x)-1}{x} - 1 \quad &\leq \quad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{2^{m-1}} + 1 - 1 \\
&= \quad \frac{1-(\frac{x}{2})^m}{1-\frac{x}{2}} - 1 = \frac{\frac{x}{2}-(\frac{x}{2})^m}{1-\frac{x}{2}} < \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x}.
\end{aligned}
$$

Da diese Beziehung für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ und $0 < x < 2$ gilt, gilt sie auch für den Grenzwert $q(x) = e^x$:

$$
0 < \frac{e^x - 1}{x} - 1 \leq \frac{x}{2-x}. \qquad \text{Ferner: } \frac{e^{-x}-1}{-x} = e^{-x}\frac{e^x-1}{x}.
$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{e^x-1}{x}$ in $x = 0$ existiert also und ist gleich 1. $\square$

5.8 Der Sinus ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und $\sin' 0 = 1$. $\square$

Beweis: Hier verwenden wir 4.9: Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist

$$
\sin x \cos x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.
$$

Es folgt:

$$
(1) \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}
$$

Für $0 > x > -\frac{\pi}{2}$ ist $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, folglich

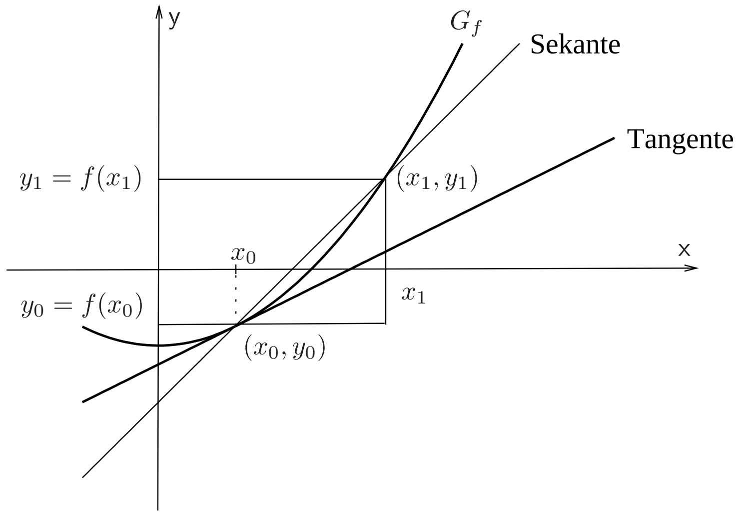
$$
\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)}
$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$ folgt, daß (1) für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ gilt. Wegen der Stetigkeit des Cosinus in $x_0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ folgt 5.8. $\square$

Bevor wir fortfahren, erinnern wir an die bekannte *geometrische Interpretation* der Ableitung $f'(x_0)$ als Anstieg der Tangente an den Funktionsgraphen

$$
G_f := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset \mathbb{R}^2
$$

der Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ im Punkte $(x_0, f(x_0))$.



Für jedes $x_1 \neq x_0$ des Definitionsbereiches M von f ist der Differenzenquotient $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ der "Anstieg" $m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ der "Sekante"

$$S = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, \quad y = m(x - x_0) + f(x_0)\}$$

durch die beiden verschiedenen Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen G_f von f.

Die Ableitung

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kann man, anschaulich einleuchtend, als den Anstieg der "Tangente" T an G_f in Punkte $(x_0, f(x_0))$ *interpretieren*:

$$T = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = f^{'}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\}.$$

Da es gar nicht so einfach ist, den Begriff der Tangente unabhängig zu definieren (versuchen Sie's mal!), gehen wir einfach umgekehrt vor und nennen die mithilfe der Ableitung $f^{'}(x_0)$ *definierte* Gerade T die Tangente an G_f in $(x_0, f(x_0))$.

Unser Beispiel 5.7 besagt: Die Exponentialfunkion $\exp = e^{\mathsf{x}}$ besitzt im Punkte $(x_0, e^0) = (0, 1)$ ihres Graphen eine Tangente, deren Anstieg gleich 1 ist.

Wenn wir uns an die Definition des Grenzwertes einer Funktion im Sinne einer stetigen Ergänzung erinnern (5.4), bedeutet die Differenzierbarkeit von f im Punkte $x_0 \in M$ ja nichts anderes, als daß wir die auf $M \setminus \{x_0\}$ definierte

Funktion g, mit

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall\, x \in M \backslash \{x_0\},$$

in x_0 durch den Funktionswert $f^{'}(x_0)$ zu einer *in* x_0 *stetigen* Funktion f^* ergänzen können.
Durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^*(x)$$

nach $f(x)$ erhalten wir:

$$f(x) = f(x_0) + f^*(x)(x - x_0).$$

Diese Darstellung ist offensichtlich auch für $x = x_0$ richtig.
Halten wir fest:

5.9 Satz: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkte $x_0 \in M$ differenzierbar, wenn es eine *in* x_0 *stetige* Funktion $f^* : M \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $f(x) = f(x_0) + f^*(x)(x - x_0) \quad \forall\, x \in M.$

Es gilt dann an der Stelle x_0:

2. $f^{'}(x_0) = f^*(x_0).$ □

In unserem Eingangsbeispiel $f = \mathsf{x}^2$ ist

$$f^*(x) = x + x_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f^*(x_0) = 2x_0 = f^{'}(x_0).$$

Die mit f^* definierte Funktion f_1 auf M, mit

5.9' $f_1(x) := f^*(x) - f^{'}(x_0) \quad \forall\, x \in M,$
ist wie f^* *in* x_0 *stetig*, hat dort aber den Wert 0. Aus 5.9.1 folgt:

5.10 $\quad f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + f_1(x)(x - x_0).$
Das besagt, daß sich der Funktionswert $f(x)$ der Funktion f von dem Funktionswert $f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$ der Tangentenfunktion nur um den "Fehler" $f_1(x)(x - x_0)$ unterscheidet. Da dieser Fehler selbst nach Division durch die

Argumentabweichung $x - x_0$ bei Annäherung an x_0 beliebig klein wird, spricht man von "linearer Approximation" oder "Approximation erster Ordnung".

Die Regel 5.9 zeigt zunächst einmal, daß die Differenzierbarkeit eine Spezialisierung der Stetigkeit ist. Vor allem aber ermöglicht sie, die allgemeinen Regeln für stetige Funktionen ganz leicht in *Differentiationsregeln* zu übersetzen.

5.11 Kettenregel: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei aus den beiden Funktionen $h : M \to N \subset \mathbb{R}$ und $g : N \to \mathbb{R}$ zusammengesetzt; d. h.

$$f(x) = g(h(x)) \quad \forall\, x \in M.$$

Ist dann h in $x_0 \in M, g$ in $y_0 := h(x_0) \in N$ differenzierbar, so ist auch f in x_0 differenzierbar. Für die Ableitung gilt:

$$f^{'}(x_0) = g^{'}(y_0) \cdot h^{'}(x_0).$$

□

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen über g und h können wir gemäß 5.9 schreiben:

$$h(x) = h(x_0) + h^*(x)(x - x_0) \quad \forall\, x \in M,$$
$$g(y) = g(y_0) + g^*(y)(y - y_0) \quad \forall\, y \in N.$$

Dabei ist h^* in x_0, g^* in $y_0 = h(x_0)$ stetig;

$$h^*(x_0) = h^{'}(x_0), \quad g^*(y_0) = g^{'}(y_0).$$

Durch Einsetzen von $y = h(x)$ in g folgt sofort:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \\ &= g(y_0) + g^*(h(x))(h(x) - h(x_0)) \\ &= f(x_0) + g^*(h(x))h^*(x)(x - x_0). \end{aligned}$$

Nach den Regeln für stetige Funktionen ist $f^* : M \to \mathbb{R}$, mit

$$f^*(x) := g^*(h(x))h^*(x) \quad \forall\, x \in M,$$

in x_0 stetig. Nach 5.9 ist daher f in x_0 differenzierbar und

$$\begin{aligned} f^{'}(x_0) &= f^*(x_0) = g^*(h(x_0))h^*(x_0) \\ &= g^*(y_0)h^*(x_0) = g^{'}(y_0)h^{'}(x_0). \end{aligned}$$

□

Ein einfaches Beispiel:

5.12 Für jede positive Zahl a ist die Exponentialfunktion e_a zur Basis a, also $e_a(x) = a^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, im Nullpunkt differenzierbar. Für die Ableitung gilt:

$$e_a^{'}(0) = \ln a.$$

$\square$

Beweis: Nach der Umrechnungsformel 3.6.1 ist $a^x = e^{x \ln a}$, also

$$e_a(x) = \exp(h(x)), \text{ mit } h(x) := cx, c := \ln a.$$

Natürlich ist die lineare Funktion h in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$h^{'}(x) = c \text{ für jedes } x \in \mathbb{R} \quad \text{(gem. 5.8)}.$$

Nach der Kettenregel und Beispiel 5.7 ist e_a in 0 differenzierbar und

$$e_a^{'}(0) = \exp'(0) \cdot h_2^{'}(0) = \exp'(0) \cdot c = 1 \cdot \ln a = \ln a.$$

$\square$

5.13 Die Logarithmusfunktion ln ist im Punkte $x_0 = 1$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\ln^{'}(1) = 1.$$

$\square$

Beweis: Es ist $1 = e^0 = \exp(0)$ und für $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y = e(y).$$

Wir schreiben hier kurz $e(y)$ statt $\exp(y)$.

Nach 5.9 ist $e(y) = 1 + e^*(y) \cdot y$, wobei e^* eine in $y_0 = 0$ stetige Funktion ist mit dem Wert $e^*(0) = e^{'}(0) = 1$ (gemäß 5.7). Es folgt:

$$x = 1 + e^*(y) \cdot \ln x.$$

Da e^* in $y_0 = 0$ stetig ist und $e^*(0) = 1$, gibt es eine positive Zahl r, derart daß $e^*(y)$ positiv ist für jedes y des Intervalls $[-r, r]$ um den Nullpunkt. Da auch ln in $x_0 = 1$ stetig ist und $\ln 1 = 0$, gibt es eine positive Zahl $s < 1$, derart daß $|\ln x| \leq r$ ist für jedes x des Intervalls $[1 - s, 1 + s]$ um $x_0 = 1$. Für diese x gilt dann:

$$\ln x = \frac{1}{e^*(\ln x)}(x - 1).$$

Nach den Regeln für stetige Funktionen ist die Funktion f^*,

$$f^*(x) := \frac{1}{e^*(\ln x)} \text{ für } x \in [1-s, 1+s],$$

in $x_0 = 1$ stetig. Gemäß 5.9 ist daher ln in $x_0 = 1$ differenzierbar und

$$\ln'(1) = f^*(1) = \frac{1}{e^*(\ln 1)} = \frac{1}{e^*(0)} = \frac{1}{e'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Die entscheidenden Beweisargumente gelten allgemein; es gilt die

5.14 Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I sei streng monoton. Im Punkte $x_0 \in I$ sei f differenzierbar und dabei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion g von f im Punkte $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Anmerkung: Wegen $g(f(x)) = x$ für $x \in I$ muß, wenn g in y_0 differenzierbar ist, nach der Kettenregel $g'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$ sein. Das heißt, im Falle $f'(x_0) = 0$ kann g nicht differenzierbar sein im Punkte $y_0 = f(x_0)$.

Das gilt z. B. für die Funktion $f = \mathsf{x}^3$ im Nullpunkt:

Zwar ist f streng monoton (wachsend) und überall differenzierbar, die Ableitung $f'(0)$ ist aber gleich 0 (gem. 2.6). Die Umkehrfunktion $g = \sqrt[3]{\mathsf{y}}$ ist daher im Nullpunkt nicht differenzierbar.

5.15 Rechenregeln: Die Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar im Punkte $x_0 \in M$.

Dann sind auch die Funktionen $f + g, f - g, f \cdot g$ und, falls $g(x_0) \neq 0$ ist, $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar. Für ihre Ableitungen gilt:

$$\begin{array}{lll} 1. & (f \pm g)'(x_0) & = f'(x_0) \pm g'(x_0), \\ 2. & (f \cdot g)'(x_0) & = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ 3. & (\frac{f}{g})'(x_0) & = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{array}$$

□

Der Beweis mit 5.9 ist ganz einfach: Es gibt Funktionen f^* und g^* auf M, die in x_0 stetig sind, so daß gilt:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & f(x_0)+f^*(x)(x-x_0), & \\ g(x) & = & g(x_0)+g^*(x)(x-x_0) & \qquad \forall\, x\in M. \end{array}$$

Es ergibt sich damit sofort:

$$\begin{array}{rcl} f(x)\pm g(x) & = & f(x_0)\pm g(x_0)+(f^*(x)\pm g^*(x))(x-x_0), \\ f(x)\cdot g(x) & = & f(x)g(x_0)+f(x)g^*(x)(x-x_0) \\ & = & f(x_0)g(x_0)+(f^*(x)g(x_0)+f(x)g^*(x))(x-x_0). \end{array}$$

Aufgrund der Rechenregeln für stetige Funktionen ergeben sich daraus gemäß 5.9 sofort die Regeln 1. und 2..

Die "Quotientenregel" 3. folgt mit 5.9 fast ebenso einfach: Weil $g(x_0)\neq 0$ ist und g in x_0 stetig ist, muß $g(x)\neq 0$ für alle $x\in M$ in der Nähe von x_0 gelten. Dort gilt dann die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{f(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{(f(x_0)+f^*(x)(x-x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x_0)+g^*(x)(x-x_0))}{g(x)g(x_0)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{f(x_0)}+\frac{f^*(x)g(x_0)-f(x_0)g^*(x)}{g(x)g(x_0)}(x-x_0)$$

Der Faktor vor $(x-x_0)$ ist eine in x_0 stetige Funktion mit dem Wert

$$\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

$\square$

Mit Hilfe der Differentiationsregeln und den grundlegenden Beispielen kann man in der Regel jede konkret gegebenen Funktionen "differenzieren".

5.16 Der Cosinus ist in $x_0=0$ differenzierbar und $\cos' 0=0$. $\square$

Beweis: Nach dem Additionstheorem 4.7 sowie 4.6.4 ist

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

Mit $x=2\alpha$ ergibt sich:

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

Mit den Rechenregeln folgt die Differenzierbarkeit von cos in $x_0=0$ und

$$\cos' 0=-4\sin\frac{0}{2}\sin'\frac{0}{2}\cdot\frac{1}{2}=0,\text{ da }\sin 0=0\text{ ist.}$$

$\square$

6 Kurvendiskussion

Ein wesentlicher Aspekt der Differentialrechnung ist der, daß *inhaltliche* Eigenschaften von Funktionen *rechnerisch* durch das Wertverhalten ihrer Ableitung beschrieben werden können. Ein einfaches Beispiel:

6.1 Ist die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist in allen Punkten $x \in M$, in denen f differenzierbar ist, $f'(x) \geq 0$. Ist f monoton fallend (also $-f$ monoton wachsend), so ist entsprechend $f'(x) \leq 0$. □

Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Das bedeutet (vgl. 5.9), daß es eine in x_0 stetige Funktion f^* auf M gibt, so daß für jedes $x \in M$

$$f(x) = f(x_0) + f^*(x)(x - x_0)$$

ist. Wenn nun f monoton wächst, so muß gelten:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für } x > x_0, \text{ also } x - x_0 > 0;$$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für } x < x_0, \text{ also } x - x_0 < 0.$$

Das hat zur Folge: $f^*(x) \geq 0$ für jedes $x \neq x_0$. Da f^* in x_0 stetig ist, kann dann sein Wert dort nicht negativ sein; vielmehr ist auch $f^*(x_0) = f'(x_0) \geq 0$. □

Wechselt das Monotonieverhalten an einer Stelle x_0, so liegt dort ein lokales Extremum vor.

6.2 Definition: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in M$ ein *lokales Maximum* bzw. *Minimum*, wenn es eine positive Zahl r gibt, so daß für jedes $x \in M$ zwischen $x_0 - r$ und $x_0 + r$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{bzw. } f(x) \geq f(x_0).$$

Beide Fälle zusammenfassend spricht man von einem *lokalen Extremum.* □

Es gilt die einfache Regel:

6.3 Besitzt die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem ("offenen") Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ im Punkte $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und ist f in x_0 differenzierbar, so ist notwendigerweise $f'(x_0) = 0$. □

Beweis: Jetzt folgt aus der Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + f^*(x)(x - x_0)$$

von f, daß $f^*(x)(x-x_0)$ auf beiden Seiten (in der Nähe) von x_0 dasselbe Vorzeichen hat, folglich f^* das Vorzeichen wechselt. Weil f^* in x_0 stetig ist und, wegen $a < x_0 < b$, beliebig nahe bei x_0 sowohl nichtnegative als auch nichtpositive Werte annimmt, muß $f^*(x_0) = f'(x_0) = 0$ sein. $\square$

Praktisch anwenden kann man das auf Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die *in jedem Punkt* ihres Definitionsbereichs I differenzierbar sind. Durch Differentiation leitet man aus f die durch die Ableitungen $f'(x)$ definierte *Funktion* $f' : I \to \mathbb{R}$ ab. Nur in den Nullstellen dieser Funktion f' kann f im "Innern" von I lokale Extrema besitzen! Eine einfache Regel von hohem praktischen Wert! Ob in einer solchen Nullstelle x_0 von f' tatsächlich ein lokales Extremum vorliegt und von welcher Art es ist, kann man sogar in der Regel auch mithilfe der Funktion f' entscheiden.

Bevor wir das weiterdiskutieren, vereinbaren wir:

6.4 Definition: Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* (auf ihrem Definitionsbereich M), wenn sie *in jedem* Punkt von M differenzierbar ist. Die dann durch die Ableitungen $f'(x)$ definierte Funktion $f' : M \to \mathbb{R}$ heißt die *Ableitung(sfunktion)* von f. $\square$

Wir notieren die vertrauten

6.5 Beispiele: Die folgenden Funktionen f sind jeweils auf dem angegebenen Definitionsbereich M differenzierbar. Es wird jeweils die Ableitung f' aufgeführt.

$$\begin{array}{lcllcl}
f &=& \mathsf{x}^n, n \in \mathbb{N}^*, M = \mathbb{R} : & f' &=& n\mathsf{x}^{n-1}; \\
f &=& \frac{1}{\mathsf{x}}, M = \mathbb{R}^* = R\backslash\{0\} : & f' &=& \frac{-1}{\mathsf{x}^2}; \\
f &=& e^{\mathsf{x}}, M = \mathbb{R} : & f' &=& e^{\mathsf{x}}; \\
f &=& a^{\mathsf{x}}, a > 0, M = \mathbb{R} : & f' &=& \ln a \cdot a^{\mathsf{x}}; \\
f &=& \ln \mathsf{x}, M = \mathbb{R}_+^* : & f' &=& \frac{1}{\mathsf{x}}; \\
f &=& \log_a \mathsf{x}, 0 < a \neq 1, M = \mathbb{R}_+^* : & f' &=& \frac{1}{\ln a \cdot \mathsf{x}}; \\
f &=& \mathsf{x}^c, c \in \mathbb{R}, M = \mathbb{R}_+^* : & f' &=& c\mathsf{x}^{c-1}; \\
f &=& \cos \mathsf{x}, M = \mathbb{R} : & f' &=& -\sin \mathsf{x}; \\
f &=& \sin \mathsf{x}, M = \mathbb{R} : & f' &=& \cos \mathsf{x}; \\
f &=& \tan \mathsf{x}, M = \mathbb{R}\backslash(\mathbb{Z}\pi \pm \frac{\pi}{2}) : & f' &=& 1 + \tan^2 \mathsf{x} = \frac{1}{\cos^2 \mathsf{x}}; \\
f &=& \cot \mathsf{x}, M = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi : & f' &=& -(1 + \cot^2 \mathsf{x}) = \frac{-1}{\sin^2 \mathsf{x}}.
\end{array}$$

$\square$

Beweis: Das erste Beispiel steht in 5.6, das zweite ist eine einfache Aufgabe.

Die natürliche Exponentialfunktion $f = e^{\mathsf{x}}$ ist im Nullpunkt differenzierbar mit der Ableitung $f'(0) = 1$ (vgl. 5.7). Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ ist (wegen 2.1)

$$e^{\mathsf{x}} = e^{\mathsf{x}-x_0+x_0} = e^{x_0}e^{\mathsf{x}-x_0}.$$

Mit der Kettenregel folgt aus dem Spezialfall, daß $e^{\mathsf{x}-x_0}$ in x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung 1. Folglich ist e^{x} in x_0 differenzierbar mit der Ableitung e^{x_0}.

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist (nach 2.13.1)

$$a^{\mathsf{x}} = e^{\mathsf{x}\cdot\ln a}; \text{ d. h. } e_a = \exp\circ(\mathsf{x}\cdot\ln a).$$

Aufgrund der Kettenregel ist a^{x} differenzierbar und

$$e_a' = \exp'(\mathsf{x}\cdot\ln a)\cdot(\mathsf{x}\cdot\ln a)' = \exp(\mathsf{x}\cdot\ln a)\cdot\ln a = e_a\cdot\ln a.$$

Im Falle $a \neq 1$ ist e_a streng monoton. Seine Ableitung $\ln a\cdot a^{\mathsf{x}}$ hat keine Nullstelle. Nach der Regel 5.14 über die Differentiation der Umkehrfunktion ist diese, also $\log_a$, ebenfalls differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{array}{rcll} \log_a'(y) & = & \frac{1}{e_a'(x)}, & \text{wobei } y = e_a(x) \text{ ist;} \\ \log_a'(y) & = & \frac{1}{\ln a\cdot y} & (e_a'(x) = \ln a\cdot e_a(x) = \ln a\cdot y) \end{array}$$

Im Spezialfall $a = e$ ist natürlich $\ln a = \log_e e = 1$; d. h.

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \text{ für jedes } y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nach der Kettenregel ist die Funktion

$$f = \mathsf{x}^c = e^{c\cdot\ln\mathsf{x}} = \exp\circ(c\cdot\ln\mathsf{x}) \text{ auf } \mathbb{R}_+^*$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$f' = \exp'(c\cdot\ln\mathsf{x})\cdot(c\cdot\ln\mathsf{x})' = \exp(c\cdot\ln\mathsf{x})\cdot\frac{c}{\mathsf{x}} = \frac{ce^{c\cdot\ln\mathsf{x}}}{\mathsf{x}} = c\frac{\mathsf{x}^c}{\mathsf{x}} = c\mathsf{x}^{c-1}.$$

$\square$

Daß $\sin\mathsf{x}$ und $\cos\mathsf{x}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar sind mit der Ableitung 1 bzw. 0, haben wir bereits bewiesen (5.8 bzw. 5.16). Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Additionstheoreme 4.7:

$$\begin{array}{rclcl} \sin\mathsf{x} & = & \sin(\mathsf{x}-x_0+x_0) & = & \sin(x_0+\mathsf{x}-x_0) \\ & = & \sin x_0\cos(\mathsf{x}-x_0) & + & \cos x_0\sin(\mathsf{x}-x_0), \\ \cos\mathsf{x} & = & \cos(\mathsf{x}-x_0+x_0) & = & \cos(x_0+\mathsf{x}-x_0) \\ & = & \cos x_0\cos(\mathsf{x}-x_0) & - & \sin x_0\sin(\mathsf{x}-x_0). \end{array}$$

Wie bei der Exponentialfunktion folgt auch hier aus dem Spezialfall $x_0 = 0$ die Differenzierbarkeit in dem beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sin' x_0 &=& \sin x_0 \cos' 0 &+& \cos x_0 \sin' 0 &=& \cos x_0, \\ \cos' x_0 &=& \cos x_0 \cos' 0 &-& \sin x_0 \sin' 0 &=& -\sin x_0. \end{array}$$

Aus $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ bzw. $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ folgt jetzt mit den Rechenregeln 5.15 die Differenzierbarkeit von Tangens und Cotangens (auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich M) und

$$\begin{aligned} \tan' \mathsf{x} &= \frac{\sin' \mathsf{x} \cos \mathsf{x} - \sin \mathsf{x} \cos' \mathsf{x}}{\cos^2 \mathsf{x}} &&= \frac{\cos^2 \mathsf{x} + \sin^2 \mathsf{x}}{\cos^2 \mathsf{x}} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 \mathsf{x}}{\cos^2 \mathsf{x}} = 1 + \tan^2 \mathsf{x} &&= \frac{1}{\cos^2 \mathsf{x}}, \\ \cot' \mathsf{x} &= \frac{\cos' \mathsf{x} \sin' \mathsf{x} - \cos \mathsf{x} \sin' \mathsf{x}}{\sin^2 \mathsf{x}} &&= \frac{-\sin^2 \mathsf{x} - \cos^2 \mathsf{x}}{\sin^2 \mathsf{x}} \\ &= -1 - \frac{\cos^2 \mathsf{x}}{\sin^2 \mathsf{x}} = -(1 + \cot^2 \mathsf{x}) &&= \frac{-1}{\sin^2 \mathsf{x}}. \end{aligned}$$

□

Wir kehren zu unseren allgemeinen Überlegungen zurück.

Da eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I zwischen zwei Punkten $x_1 \neq x_2$ aus I, in denen f denselben Wert besitzt, einen Extremwert annimmt (Folgerung aus dem Extremwertsatz 5.3), hat dann die Ableitung von f, falls f differenzierbar ist, mindestens eine Nullstelle x_0 zwischen x_1 und x_2.

Ist die Voraussetzung $f(x_1) = f(x_2)$ nicht gegeben, so ist sie doch bei der Funktion g, mit

$$g(x) := f(x) \cdot (x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1)) \cdot x \quad \forall x \in I,$$

erfüllt:

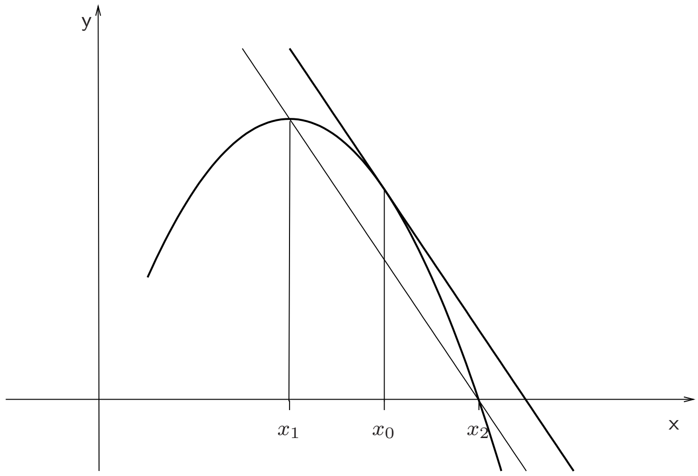
$$\begin{array}{rcrcl} g(x_1) &=& f(x_1)(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))x_1 &=& f(x_1)x_2 - f(x_2)x_1, \\ g(x_2) &=& f(x_2)(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1))x_2 &=& -f(x_2)x_1 + f(x_1)x_2. \end{array}$$

Es gibt also ein x_0 zwischen x_1 und x_2 mit $g'(x_0) = 0$. Das heißt aber nach Definition von g:

$$f'(x_0)(x_2 - x_1) - (f(x_2) - f(x_1)) = 0,$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Geometrisch interpretiert: Zu jeder Sekante S durch zwei Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ des Funktionsgraphen G_f von f gibt es eine zu S parallele Tangente T an G_f durch einen Punkt $(x_0, f(x_0))$, wobei x_0 zwischen x_1 und x_2 liegt.



Unser Ergebnis ist der

6.6 Mittelwertsatz: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I. Dann gibt es zu je zwei Punkten x_1, x_2 von I einen Punkt x_0 zwischen x_1 und x_2, so daß gilt:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

$\square$

Das gilt (trivialerweise) auch im Falle $x_2 = x_1$ mit $x_0 = x_1 = x_2$. Im Falle $x_1 \neq x_2$ liegt x_0 "echt" zwischen x_1 und x_2.

Dieser einfache Lehrsatz hat viele Konsequenzen!

6.7 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, I ein Intervall. Dann gilt:

1. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ ist konstant.
2. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist umkehrbar.
3. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ ist monoton wachsend,
   $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f$ ist monoton fallend.
4. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend,
   $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton fallend.

□

Der Beweis folgt sehr leicht aus 6.6 (und 6.1).

Da eine umkehrbare stetige Funktion auf einem Intervall "automatisch" streng monoton ist (Folgerung aus dem Zwischenwertsatz 5.2), tritt der Fall 2 nur in der Form einer der beiden Fälle von 4. auf. Das hat für unsere *"Kurvendiskussion"* zur Folge:

Zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Ableitung von f - wir legen den Normalfall zugrunde, daß f' nur endlich viele Nullstellen besitzt - verläuft f streng monoton! Daher liegt in der Nullstelle x_0 der Ableitung von f genau dann ein lokales Maximum von f vor, wenn gilt: $f'(x) \geq 0$ für $x \leq x_0$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \geq x_0$ "nahe" x_0 (d. h. vor der nächsten Nullstelle von f' bzw. dem Endpunkt von I). Ein lokales Minimum wird entsprechend bestimmt.

Wenn aber f' beim "Durchgang" durch x_0 das Vorzeichen nicht wechselt, verläuft f streng monoton durch x_0 ohne lokales Extremum (Beispiel: x^3 oder auch $\mathsf{x}|\mathsf{x}|$).

7 Näherungsweise Funktionsberechnung

Eine rechnerische Folgerung aus dem Mittelwertsatz 6.6 gewinnen wir durch Vergleich mit der Approximationsformel 5.10: Für $x_1 \neq x_0$ aus I ist

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f_1(x_1)(x_1 - x_0).$$

Wenn f auf I differenzierbar ist, gibt es nach 6.6 ein x_1' zwischen x_1 und x_0 mit:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_1')(x_1 - x_0).$$

Daher ist dann $f_1(x_1) = f'(x_1') - f'(x_0)$.

Ist die Ableitung f' von f wiederum differenzierbar, d. h. f *zweimal differenzierbar*, so können wir den Mittelwertsatz erneut anwenden: Es gibt ein x_2 zwischen x_1' und x_0 mit

$$f'(x_1') - f'(x_0) = f''(x_2)(x_1' - x_0).$$

Da dabei $|x_1' - x_0| \leq |x_1 - x_0|$ ist, folgt:

$$|f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0))| \leq |f''(x_2)|(x_1 - x_0)^2.$$

Die Funktion f wird also "von zweiter Ordnung" durch die Tangentenfunktion $f(x_0) + f'(x_0)(\mathsf{x} - x_0)$ approximiert!

Durch einen Trick kann man die Formel noch verschönern: Wir berechnen die - bei festen $x_1 \neq x_0$ aus I - durch den Ansatz

$$f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)) = c(x_1 - x_0)^2$$

definierte Zahl c mit Hilfe der zweiten Ableitung f'' von f. Dazu betrachten wir die Funktion g, mit

$$g(x) := f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c(x - x_0)^2) \quad \forall\, x \in I.$$

Sie ist wie f zweimal differenzierbar und

$$g'(x) = f'(x) - (f'(x_0) + 2c(x - x_0)), \quad g''(x) = f''(x) - 2c.$$

Nach dem Mittelwertsatz 6.6 gibt es zunächst ein x_0' zwischen x_0 und x_1 mit

$$g(x_1) = g(x_0) + g'(x_0')(x_1 - x_0).$$

Da aber offenbar gilt $g(x_0) = 0$ und $g(x_1) = 0$ (Def. von c), heißt das

$$0 = g'(x_0') = f'(x_0') - f'(x_0) - 2c(x_0' - x_0),$$

$$f'(x_0') - f'(x_0) = 2c(x_0' - x_0).$$

Es gibt dann (nach 6.6) ein x^* zwischen x_0' und x_0 mit

$$f'(x_0') - f'(x_0) = f''(x^*)(x_0' - x_0).$$

Es folgt (da $x_0' \neq x_0$) $c = \frac{1}{2}f''(x^*)$ und damit

7.1 $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x_1 - x_0)^2.$

Ist f dreimal differenzierbar, so erhält man mit dem gleichen Trick aus dem Ansatz

$$f(x_1) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x_1 - x_0)^2) = c(x_1 - x_0)^3$$

mit einem (neuen) x^* zwischen x_0 und x_1 die Lösung $c = \frac{1}{2\cdot 3}f'''(x^*)$. Indem man so fortfährt, erhält man den allgemeinen

7.2 Approximationssatz: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$- mal differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann gibt es zu je zwei Punkten x_0, x von I einen Punkt x^* zwischen x_0 und x, so daß gilt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dabei bezeichnet $f^{(n)}$ die *n-te Ableitung* von f und natürlich (vergleiche §1) $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; 0! := 1.$ □

Die Funktionswerte $f(x)$ von f können danach "von $(n+1)$-ter Ordnung" durch die Werte des Polynoms

$$f(x_0) + f'(x_0)(\mathsf{x} - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\mathsf{x} - x_0)^n$$

approximiert werden.

Sehr überzeugend ist das Beispiel:

Die Exponentialfunktion $f = e^{\mathsf{x}}$ ist (wegen $f' = f$; vgl. 6.5) beliebig oft differenzierbar. Für ihre n-te Ableitung gilt: $f^{(n)} = e^{\mathsf{x}}$.

Mit $x_0 = 0$ ergibt 7.2: Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{x^*}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

wobei x^* ein (nicht näher bekannter) Punkt zwischen 0 und x ist. Da daher jedenfalls $e^{x^*} \leq e^{|x|}$ ist, können wir schreiben: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

7.3 $\left|e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

Für $x = 1$ und $n = 10$ ist die rechts stehende Fehlerschranke bereits kleiner als 10^{-7}; der Näherungswert

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} = 2{,}7182818\ldots$$

stimmt also mindestens in den ersten sechs Stellen hinter dem Komma mit der Eulerschen Zahl e überein (vgl. Ergänzung zu 2.).

Auch für die übrigen vertrauten Elementarfunktionen $\ln, \cos$ und $\sin$ liefert der Approximationssatz 7.2 gute Näherungsformeln mit überschaubaren Fehlerschranken, mit deren Hilfe sie "berechnet" ('computed') werden können.

Wegen der übersichtlichen Ableitungsformeln 6.5 lassen sie sich für Sinus und Cosinus schnell ableiten; mit ln beschäftigen wir uns in der Übung.

Aus 6.5 folgt, daß die Winkelfunktionen unendlich oft differenzierbar sind. Es gelten die

7.4 Approximationsformeln: Für jede reelle Zahl x und jede natürliche Zahl n ist

$$\begin{aligned} \left|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ \left|\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

□

Beweis: Die Approximationsformel 7.2 liefert für sin:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k + \frac{\sin^{(m+1)} x^*}{(m+1)!} x^{m+1}.$$

Aus 6.5 folgt:

$$\sin^{(k)} x = \begin{cases} \cos x & \text{für } k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -\sin x & \text{für } k = 2, 6, 10, 14, \ldots \\ -\cos x & \text{für } k = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ \sin x & \text{für } k = 4, 8, 12, 16, \ldots \end{cases}$$

Darum ist $\sin^{(2l)} 0 = 0$ und $\sin^{(2l+1)} 0 = (-1)^l$.

Außerdem ist $|\sin^{(k)} x^*| \leq 1$. Wir setzen $m = 2n+1$; dann ist $m+1 = 2n+2$ und

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\sin^{(k)} 0}{k!} x^k = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1}.$$

Durch Einsetzen folgt die Behauptung für sin.

Die Approximationsformel für cos beweist man analog. $\square$

Da sich alle Werte von sin und cos in einfacher Weise aus denen für die Argumente x mit $0 \leq x \leq \pi/2$ berechnen lassen, sind die Approximationsformeln nur für diese Argumente wichtig. Aufgrund von 4.6.2 genügt es sogar, die Werte für x mit $0 \leq x \leq \pi/4$ zu bestimmen.

Da für tan und cot nicht so einfache Ableitungsformeln gelten wie für e^x, sin, cos (und ln), macht bei ihnen die Anwendung des Approximationssatzes technische Schwierigkeiten. Für die Berechnung dieser Funktionen ist das allerdings unerheblich, da sie ja direkt aus sin und cos gewonnen werden.

8 Integralrechnung

Unter *Integration* verstehen wir die Umkehrung der Differentiation, nämlich die Aufgabe, aus der Ableitung f' die Funktion f zu rekonstruieren. Sie ist zugleich Einstieg und Grundlage zu einer allgemeinen Theorie des "Integrierens", nämlich: der Theorie der Differentialgleichungen – mit vielfältigen Anwendungen in den Natur- und Technikwissenschaften.

8.1 Definition: Gegeben sei eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I. Unter einer *Stammfunktion* von f verstehen wir eine differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, deren Ableitung f ist; also mit $g' = f$. Wir nennen f *integrabel*, wenn f eine Stammfunktion besitzt. □

Zur Erläuterung notieren wir ein paar konkrete

8.2 Beispiele: Stammfunktion von

$$\begin{array}{lll}
f = \mathsf{x}^n, n \in \mathbb{N},\ \text{auf } I = \mathbb{R} & \text{ist} & g = \dfrac{1}{n+1}\mathsf{x}^{n+1}; \\
f = \mathsf{x}^c, c \neq -1,\ \text{auf } I = \mathbb{R}_+^* & \text{ist} & g = \dfrac{1}{c+1}\mathsf{x}^{c+1}, \\
f = \dfrac{1}{\mathsf{x}} \text{ auf } I = \mathbb{R}_+^* & \text{ist} & g = \ln \mathsf{x}; \\
f = e^{\mathsf{x}} \text{ auf } I = \mathbb{R} & \text{ist} & g = e^{\mathsf{x}}; \\
f = a^{\mathsf{x}}, 0 < a \neq 1,\ \text{auf } \mathbb{R} & \text{ist} & g = \dfrac{1}{\ln a} a^{\mathsf{x}}; \\
f = \ln \mathsf{x} \text{ auf } I = \mathbb{R}_+^* & \text{ist} & g = \mathsf{x} \cdot \ln \mathsf{x} - \mathsf{x}; \\
f = \sin \mathsf{x} \text{ auf } \mathbb{R} & \text{ist} & g = -\cos \mathsf{x}; \\
f = \cos \mathsf{x} \text{ auf } \mathbb{R} & \text{ist} & g = \sin \mathsf{x}.
\end{array}$$

□

Man bestätigt das einfach durch Differenzieren der angegebenen Funktion g.

Die zentrale theoretische Feststellung ist der Existenzsatz:

8.3 Satz: Jede *stetige* Funktion auf einem Intervall ist integrabel. □

Beweisen können wir das mit unseren elementaren Hilfsmitteln nicht (bzw. nur mit einigem Aufwand; vgl. Ergänzung zu §9). Wir können aber leicht feststellen: Jede integrable Funktion hat viele Stammfunktionen, die sich allerdings nur um eine additive Konstante unterscheiden.

Denn ist g Stammfunktion von f, also $g' = f$, und $c \in \mathbb{R}$, so ist wegen

$$(g+c)' = g' + c' = g' = f \quad (c' = 0)$$

auch $g + c$ Stammfunktion von f.

Sind g_1 und g_2 Stammfunktionen derselben Funktion f auf dem *Intervall* I, so gilt für die Funktion $g := g_2 - g_1$ auf I offenbar:

$$g' = g_2' - g_1' = f - f = 0.$$

Aufgrund der Folgerung 6.7.1 des Mittelwertsatzes ist g eine Konstante c; also $g_2 = g_1 + c$.

Anders formuliert:

8.4 Satz: Haben die beiden Stammfunktionen g_1 und g_2 der integrablen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auch nur in einem Punkt des Intervalls I denselben Wert, so stimmen sie auf ganz I überein. □

Dieser Eindeutigkeitssatz hat zur Folge, daß für je zwei Argumente $a, b \in I$ die Differenz $g(b) - g(a)$ der Werte einer Stammfunktion g von f gar nicht von der Wahl von g, sondern nur von f abhängt!

8.5 Definition: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion auf dem Intervall I; g eine Stammfunktion. Für je zwei Elemente $a, b \in I$ heißt dann die Zahl

$$\int\limits_a^b f(x)dx := g(b) - g(a) =: [g]_a^b$$

das *Integral* über f von a bis b. □

So ist z.B.

$$\int\limits_2^1 (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_2^1 = 1 - \frac{1}{3} - \left(2 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Die *Integrationsregeln* ergeben sich sehr einfach aus den entsprechenden Differentiationsregeln.

Im weiteren bezeichnet I ein festes Intervall; a, b seien zwei Punkte von I. Mit f, f_1, f_2 werden integrable Funktionen auf I bezeichnet.

8.6
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Das folgt direkt aus der Definition des Integrals.

8.7
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für jedes } c \in I.$$

Beweis: Sei g eine Stammfunktion von f. Dann ist die rechte Seite von 8.7 die Zahl
$$g(c) - g(a) + g(b) - g(c) = g(b) - g(a),$$
und das ist die linke Seite von 8.7. □

8.8
$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

8.9
$$\int_a^b cf(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Diese "Summenregel" und "Faktorregel" folgen direkt aus den entsprechenden Regeln für Ableitungen: Sind g_1 und g_2 Stammfunktionen von f_1 bzw. f_2, also $f_1 = g_1', f_2 = g_2'$, so ist $g_1 \pm g_2$ Stammfunktion von $f_1 \pm f_2$; denn $(g_1 \pm g_2)' = g_1' \pm g_2' = f_1 \pm f_2$. Aufgrund von $[g_1 \pm g_2]_a^b = [g_1]_a^b \pm [g_2]_a^b$ folgt dann die Behauptung 8.8. Ist g Stammfunktion von f, so ist cg Stammfunktion von cf, und $[cg]_a^b = c[g]_a^b$; das ist 8.9.

8.10 Ist $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$ und $a \leq b$, so ist
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Beweis: Sei g eine Stammfunktion von f, also $g' = f$. Dann ist aufgrund der Voraussetzung $g'(x) \geq 0$ für jedes $x \in I$. Aufgrund der Folgerung 6.7.3

aus dem Mittelwertsatz ist daher g monoton wachsend. Insbesondere ist für $a \leq b$ stets $g(a) \leq g(b)$ und damit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) \geq 0.$$

Aus 8.10 folgt mit (8.8) sofort die *Monotonieregel*:

8.11 Ist $f_1(x) \leq f_2(x)$ für jedes $x \in I$ und $a \leq b$, so ist

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \leq \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Beweis: Setze $f := f_2 - f_1$ in 8.10 ein! $\square$

Die Produktregel der Differentialrechnung liefert folgende *Produktregel* der Integralrechnung.

8.12 Satz: Seien f_1 und f_2 differenzierbar auf I. Ist dann $f_1 \cdot f_2'$ integrabel, so auch $f_1' \cdot f_2$ und es ist

$$\int\limits_a^b f_1'(x)f_2(x)dx = [f_1 \cdot f_2]_a^b - \int\limits_a^b f_1(x)f_2'(x)dx.$$

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt $f_1 \cdot f_2'$ eine Stammfunktion g_1. Dann ist $g_2 := f_1 \cdot f_2 - g_1$ differenzierbar und

$$g_2' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2' - g_1' = f_1' \cdot f_2;$$

d.h. g_2 ist Stammfunktion von $f_1' \cdot f_2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b f_1'(x)f_2(x)dx &= [g_2]_a^b = [f_1 \cdot f_2]_a^b - [g_1]_a^b \\ &= [f_1 \cdot f_2]_a^b - \int\limits_a^b f_1(x)f_2'(x)dx. \end{aligned}$$

Beispiel: $f_1 = \frac{\mathsf{x}^2}{2}, f_2 = \ln \mathsf{x}; f_1' = \mathsf{x}, f_1' \cdot f_2 = \mathsf{x} \ln \mathsf{x};$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x \cdot \ln x \; dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \; dx = \left[\frac{\mathsf{x}^2}{2} \cdot \ln \mathsf{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \ln'(x) dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).
\end{aligned}$$

Die Kettenregel der Differentialrechnung liefert folgende *Substitutionsregel* der Integralrechnung.

8.13 Satz: Es sei $h : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Für jede integrable Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J, das alle Werte $h(x)$ von h enthält, ist dann die Funktion $(f \circ h) \cdot h'$ auf I integrabel, und es ist

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(y) dy.$$

$\square$

Der Deutlichkeit halber bezeichnen wir hier die Argumente aus I mit x, die aus J mit y.

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt f eine Stammfunktion g auf J'. Nach der Kettenregel 5.11 ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ h$ auf I differenzierbar und $(g \circ h)' = (g' \circ h) \cdot h' = (f \circ h) \cdot h'$. Also ist $g \circ h$ Stammfunktion von $(f \circ h) \cdot h'$ auf I. Daher gilt:

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = [g \circ h]_a^b = g(h(b)) - g(h(a)) = [g]_{h(a)}^{h(b)} = \int_{h(a)}^{h(b)} f(y) dy.$$

$\square$

Beispiel: Mit $h(x) = x^2$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^2 x^3\sqrt{1+x^2}dx \quad &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 2x \cdot x^2\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 h'(x)h(x)\sqrt{1+h(x)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_1^4 y\sqrt{1+y}\, dx \qquad (h(1) = 1, h(2) = 4) \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_1^4 (1+y)\sqrt{1+y}\, dy - \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{1+y}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_1^4 (1+y)^{\frac{3}{2}} dy - \frac{1}{2}\int\limits_1^4 (1+y)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

9 Anwendungen des Integrals

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes kann man das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

geometrisch interpretieren: Es gibt ein x_0 zwischen a und b, so daß gilt:

$$g(b) - g(a) = g'(x_0)(b-a) = f(x_0)(b-a).$$

Die sich so ergebende Formel

9.1 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$

nennt man gelegentlich auch den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*: Das rechts stehende Produkt $f(x_0)\cdot(b-a)$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit der "Breite" $b-a$ und der "Höhe" $f(x_0)$ (die allerdings negativ sein kann).

Indem wir das auf kleine Teilintervalle von $[a,b]$ anwenden (wir setzen dabei $a < b$ voraus), gelangen wir zu folgender Interpretation des Integrals als Flächeninhalt:

9.2 Es sei $Z = (a_0, a_1, ..., a_n)$ eine *Zerlegung* von $[a,b]$; d.h. $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n = b$.
Dann gibt es zu jedem $k = 1, ..., n$ ein x_k zwischen a_{k-1} und a_k, so daß gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(a_k - a_{k-1}).$$

$\square$

Beweis: Gemäß 8.7 ist jedenfalls

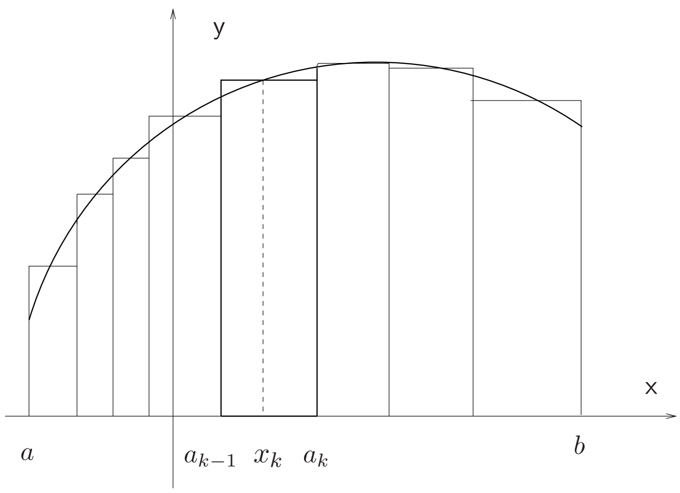
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{b} f(x)dx = ...\\ &= \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx.\end{aligned}$$

Gemäß der Vorbemerkung können wir in jedem Teilintervall $[a_{k-1}, a_k]$ ein x_k finden mit

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx = f(x_k)(a_k - a_{k-1}).$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Je feiner die Zerlegung Z ist, umso besser nähert sich die von den Rechtecken gebildete Punktmenge derjenigen an, die von dem Funktionsgraphen G_f, der x-Achse und den beiden Parallelen zur y-Achse durch a und b begrenzt wird, jedenfalls dann, wenn f stetig ist.



Im Falle $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in [a, b]$ (wie in der Skizze) kann man somit das Integral über f von a bis b zur *Definition* des Flächeninhaltes dieser Punktmenge unter dem Graphen von f verwenden.

Etwas allgemeiner kann man damit den Flächeninhalt der Punktmenge zwischen zwei Funktionsgraphen G_{f_1} und G_{f_2} mit $f_1 \leq f_2$ definieren.

9.3 Definition: Zu der Punktmenge M der Ebene $\mathbb{R}^2$ gebe es zwei stetige Funktionen f_1 und f_2 auf einem Intervall $[a, b]$ mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für jedes $x \in [a, b]$, derart daß gilt: $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$.

Dann nennen wir die (nichtnegative) Zahl

$$|M| := \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

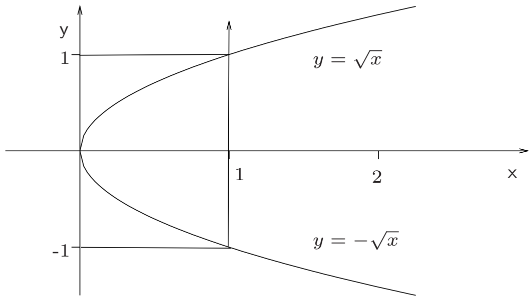
den *Flächeninhalt* von M. $\square$

Gemäß der Vorüberlegung müßten wir eigentlich

$$|M| = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

setzen; nach der Summenregel 8.8 ist das aber dasselbe wie das Integral über $f_2 - f_1$.

Beispiel: $M = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 1\}$



Hier ist $a = 0, b = 1$,

$$f_1(x) = -\sqrt{x}, f_2(x) = \sqrt{x} \text{ für jedes } x \in [0, 1];$$

$$|M| = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

9.4 Für jede positive reelle Zahl r hat die *Kreisscheibe*

$$K(r) := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

mit dem Radius r den Flächeninhalt $|K(r)| = \pi r^2$. Dabei bezeichnet π den Flächeninhalt der *Einheitskreisscheibe* $K(1)$. $\square$

Beweis: Hier variiert x zwischen $a = -r, b = r$ und dabei y jeweils zwischen $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Also ist

$$|K(r)| = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Mit der "Substitution" $x = h(t) := rt$ für $t \in [-1, 1]$ ergibt die Substitutionsformel 8.13 (von rechts nach links!):

$$\begin{aligned}
|K(r)| &= \int\limits_{h(-1)}^{h(1)} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int\limits_{-1}^{+1} 2\sqrt{r^2 - h(t)^2}\, h'(t)dt \\
&= \int\limits_{-1}^{+1} 2\sqrt{r^2 - r^2t^2} \cdot r\, dt = r^2 \int\limits_{-1}^{+1} 2\sqrt{1 - t^2}\, dt = r^2|K(1)| = r^2\pi.
\end{aligned}$$

$\square$

Die Zahl π kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen (4. Thema) näher berechnen.

Die Definition 9.3 des Flächeninhaltes $|M|$ erfüllt das *Prinzip des Cavalieri*: Für festes $x \in [a, b]$ variiert y in dem Intervall $[f_1(x), f_2(x)] =: M(x)$, dessen Länge $f_2(x) - f_1(x) =: |M(x)|$ den "Integranden" bildet; d.h.

$$|M| = \int\limits_a^b |M(x)|dx.$$

Analog gewinnen wir nach dem Prinzip des Cavalieri für (geeignete) Punktmengen M des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ eine Definition des Volumens.

9.5 Definition: Die Teilmenge M des $\mathbb{R}^3$ habe folgende Eigenschaften:

1. Diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die die Menge $M(x) := \{(y, z) \mid (x, y, z) \in M\}$ in der (y, z)-Ebene nicht leer ist, variieren in einem Intervall $[a, b]$.
2. Für jedes $x \in [a, b]$ besitzt $M(x)$ einen Flächeninhalt $|M(x)|$ im Sinne von Definition 9.3.
3. Die Funktion f auf $[a, b]$, mit $f(x) = |M(x)|$ für $x \in [a, b]$, ist stetig.

Dann nennen wir die Zahl

$$|M| := \int\limits_a^b |M(x)|dx$$

das *Volumen* von M. $\square$

Zum Beispiel können wir das Kugelvolumen berechnen.

9.6 Beispiele: Für positives r bezeichne $M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$ die Kugel mit dem Radius r.

Nur für x zwischen $-r$ und $+r$ ist

$$M(x) = \{(y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\} = \{(y,z) \mid y^2+z^2 \leq r^2 - x^2\}$$

nicht leer. Offenbar ist $M(x)$ die Kreisscheibe mit dem Radius $r(x) := \sqrt{r^2-x^2}$. Ihr Flächeninhalt ist

$$|M(x)| = \pi r(x)^2 = \pi(r^2-x^2).$$

Das ist offenbar eine stetige Funktion auf $[-r,r]$; eine Stammfunktion ist

$$g(x) = \pi\left(r^2x - \frac{1}{3}x^3\right).$$

Also gilt für das Kugelvolumen

$$\begin{aligned} |M| &= \int_{-r}^{+r} |M(x)|dx = \int_{-r}^{+r} \pi(r^2-x^2)dx \\ &= \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{+r} = \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

□

Nach diesem Verfahren kann man generell für *Rotationskörper* – das sind Punktmengen M des $\mathbb{R}^3$, bei denen die ebenen Mengen

$$M(x) = \{(y,z) \mid (x,y,z) \in M\} \subset \mathbb{R}^2$$

(leer oder) Kreisscheiben sind, deren Mittelpunkte auf einer Geraden (der "Achse") liegen – das Volumen berechnen.

Die etwas kunstvollen Definitionen des Flächeninhalts bzw. Volumens, die ja nur für gewisse technische Sonderfälle gelten (z.B. nicht für einen Kreisring bzw. Reifen), sind Spezialfälle einer viel allgemeineren "Maßtheorie".

Ergänzung

Die geometrische Interpretation 9.2 des Integrals gewissermaßen umkehrend kann man für *stetige* Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Existenz von Stammfunktionen und damit des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ herleiten (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*).

Da wir die Zwischenwerte $f(x_k)$ in 9.2 nicht näher kennen, ersetzen wir diese – wegen der Stetigkeit von f treten bei genügend kleinen Teilintervallen sowieso keine großen Abweichungen bei den Funktionswerten auf – (z.B.) durch die kleinsten Funktionswerte m_k von f auf den Teilintervallen $[a_{k-1}, a_k]$:

$$S(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k(a_k - a_{k-1}).$$

Diese Zahl ist in der Regel („etwas") kleiner als das unbekannte Integral. „Verfeinern" wir ein Teilintervall $[a_{k-1}, a_k]$ durch ein „Zwischenargument" $c \in [a_{k-1}, a_k]$, so können die beiden Minimalwerte m'_k und m''_k von f auf $[a_{k-1}, c]$ bzw. $[c, a_k]$ natürlich nicht kleiner als m_k sein (mindestens einer von ihnen ist m_k; der andere ist in der Regel größer). Daher ist der Summand

$$\begin{aligned} m_k(a_k - a_{k-1}) &= m_k(a_k - c) + m_k(c - a_{k-1}) \\ &\leq m''_k(a_k - c) + m'_k(c - a_{k-1}); \end{aligned}$$

also gilt für die feinere Zerlegung $Z' = (a, \ldots, a_{k-1}, c, a_k, \ldots, b)$ von $[a, b]$:

$$S(f, Z) \leq S(f, Z').$$

Das gilt erst recht, wenn Z durch mehrere neue Teilpunkte verfeinert wird. Auf der anderen Seite wird mithilfe des Maximums M von f auf $[a, b]$ (vgl. 5.3) jede „Zerlegungssumme" $S(f, Z)$ durch die Zahl

$$\sum_{k=1}^{n} M(a_k - a_{k-1}) = M \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = M \cdot (b - a)$$

nach oben beschränkt. Die Menge $\mathcal{S}^0(f)$ der oberen Schranken der Zahlenmenge $\mathcal{S}(f)$ der Summen $S(f, Z)$ zu den Zerlegungen Z von $[a, b]$ ist also nicht leer. Klar: $\mathcal{S}(f)$ „liegt links" von $\mathcal{S}^0(f)$. Wegen der „Lückenlosigkeit" der Zahlengeraden gibt es eine Zahl z „zwischen" $\mathcal{S}(f)$ und $\mathcal{S}^0(f)$. Weil sie rechts von $\mathcal{S}(f)$ liegt, ist z eine obere Schranke von $\mathcal{S}(f)$, gehört also zu $\mathcal{S}^0(f)$. Weil z links von $\mathcal{S}^0(f)$ liegt, ist z die kleinste obere Schranke von $\mathcal{S}(f)$, insbesondere eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie (also z) – gewissermaßen als Ersatz für das fehlende Integral – mit $I(f)$:

$$I(f) = kloS\{S(f, Z); Z \text{ zerlegt } [a, b]\}.$$

Nun kann man darangehen, für $I(f)$ die gleichen Regeln zu beweisen wie für das Integral. Uns genügt hier die „Additivität" (vgl. 8.7):

Für jedes $c \in [a,b]$ ist

$$I(f) = I(f \mid [a,c]) + I(f \mid [c,b]).$$

Zum Beweis müssen wir die Zahlenmengen A, B und C der oben definierten Summen zu den Zerlegungen der Teilintervalle $[a,c]$ und $[c,b]$ bzw. von $[a,b]$ in Beziehung setzen. Zu jedem Element $s = S(f,Z)$ aus C findet man, wie gerade gesehen, durch Hinzunahme des Teilpunktes c derartige Summen $s_1 \in A$ und $s_2 \in B$ mit $s \leq s_1 + s_2$. Demnach stimmen die oberen Schranken von C mit denen der Teilmenge

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

von C überein. Es bleibt also zu zeigen:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Der Nachweis dieser allgemeinen Formel ist eine einfache (zugleich lehrreiche) Übung zum Begriff der kleinsten oberen Schranke.

Mit Blick auf die Definition 8.5 des Integrals definieren wir jetzt („in umgekehrter Richtung“)

$$g(x) := I(f \mid [a,x]) \quad \forall x \in [a,b]. \tag{9.1}$$

Dann ist $g(a) = 0$ und

$$g(b) = I(f) = g(b) - g(a).$$

Allgemein gilt für je zwei Punkte $x_0 \leq x$ aus $[a,b]$ aufgrund der Additivität:

$$g(x) - g(x_0) = I(f \mid [a,x]) - I(f \mid [a,x_0]) = I(f \mid [x_0,x]).$$

Bezeichnet nun $m(f \mid [x_0,x])$, $M(f \mid [x_0,x])$ das Minimum bzw. das Maximum von f auf dem Intervall $[x_0,x]$, so gehört $m(f \mid [x_0,x])(x-x_0)$ zu der Menge $\mathcal{S}(f \mid [x_0,x])$, während $M(f \mid [x_0,x])(x-x_0)$ wie eingangs gesehen eine obere Schranke von $\mathcal{S}(f \mid [x_0,x])$ ist. Danach ist

$$m(f \mid [x_0,x])(x-x_0) \leq I(f \mid (x_0,x)) \leq M(f \mid [x_0,x])(x-x_0).$$

Für $x_0 < x$ folgt somit:

$$m(f \mid [x_0,x]) \leq \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \leq M(f \mid [x_0,x]).$$

Das gilt auch im Falle $x < x_0$, weil ja

$$\frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ist; wir müssen nur links und rechts unter $[x_0, x]$ das Intervall $[x, x_0]$ verstehen.

Weil f in x_0 stetig ist, gilt nun:

$$\lim_{x \to x_0} m(f \mid [x_0, x]) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0} M(f \mid [x_0, x]).$$

Folglich ist g in x_0 differenzierbar mit der Ableitung $g'(x_0) = f(x_0)$. Da x_0 in $[a, b]$ ganz beliebig gewählt war, ist gezeigt, daß g eine Stammfunktion von f ist. Der Hauptsatz ist bewiesen.

Die im Beweis definierte Zahl $I(f)$ wird in der Literatur das „Riemannsche Integral“ von f genannt. Es wird traditiongemäß mit viel Aufwand in den Analysis-Kursen des Gymnasiums eingeführt – statt des in jeder Beziehung einfacheren „Cauchy-Integrals“ (8.5) –, obwohl die „Integrierbarkeit“ stetiger Funktionen in aller Regel gar nicht gezeigt wird. Tempora mutantur, sed traditiones resistunt!

10 Aufgaben

1. Potenzen und Wurzeln

1.1 Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $n^{(n^n)} = (n^n)^n$?

1.2 Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$
$$1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n.$$

1.3 Für welche natürliche Zahlen n ist

$$n^2 < 2^n \ ?$$

1.4 Wie entwickelt sich ein(e) Kapital/Volkswirtschaft bei 2 % jährlichen Zinsen/Wachstum pro Jahr in 100 Jahren?

1.5 Vergleichen Sie der Größe nach $\sqrt[9]{6}$ mit $\sqrt[11]{9}$.

1.6 Berechnen Sie $\sqrt{3}$ auf 10 Stellen hinter dem Komma.

2. Exponentialfunktionen

2.1 Berechnen Sie (ungefähr)

a) $2^{1{,}5}$ und $2^{1{,}25}$, b) $2^{\sqrt{2}}$.

2.2 Zeigen Sie: $2\sqrt[3]{2} < 2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.

2.3 Eine Bakterienpopulation der Anfangsgröße $m_0 = 10.000$ wachse täglich um 10 %.

a) Wieviele Bakterien existieren nach 10, nach 20 Tagen?

b) In welcher Zeit hat sich die Population verzehnfacht/verhundertfacht?

2.4 Die Halbwertzeit von radioaktivem Caesium (und Strontium) beträgt 30 Jahre. Wann ist die Radioaktivität einer "Probe" auf 1 % abgeklungen?

2.5 Lohnt sich eigentlich die "stetige Verzinsung"? Vergleichen Sie die jährliche mit der stetigen Verzinsung über 5 Jahre bei einem Zinsfuß p von 5, 6, 7, 8, 9, 10 %.

3. Logarithmen

3.1 Warum ist $\log_2 2^3 = 3$ und $\log_2 \sqrt[3]{2} = \dfrac{1}{3}$?

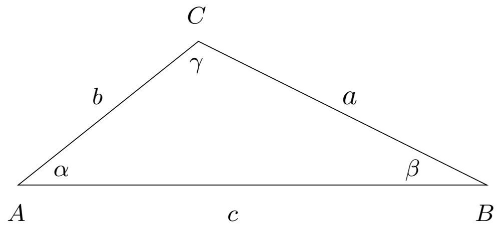
3.2 Zeigen Sie: $2 < \log_2 5 < 2,5$.

3.3 Vergleichen Sie der Größe nach: $\log_2 3$ und $\log_3 5$.

4. Trigonometrische Funktionen

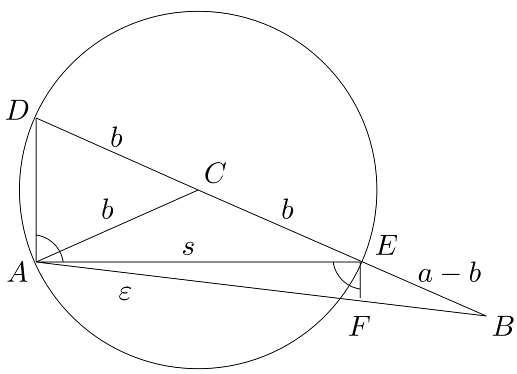
4.1 Das Dach eines Gartenpavillons soll die Gestalt einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide mit einer Grundkante der Länge $a = 1\ m$ erhalten. Der Neigungswinkel der Seitenflächen soll $\delta = 30°$ betragen. Bestimmen Sie die Maße der Seiten und der Winkel der Seitenflächen sowie die Höhe der Pyramide.

4.2 Im Dreieck



sei $a > b$. Man leite den *Tangenssatz* ab: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Hinweis: Man konstruiere den Kreis um C mit dem Radius b und betrachte die folgende Skizze. Dabei sei die Strecke EF parallel zu DA. Man zeige $\delta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \varepsilon = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ und beweise, daß die als rechte notierten Winkel in der Tat rechte Winkel sind. Dann wende man Strahlensätze an.



4.3 Man beweise folgende Formeln:

a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$;

b) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ für $k \in \mathbb{Z}$;

c) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$;

d) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4.4 Ein an einem Band befestigter Körper führe im Gegenuhrzeigersinn eine gleichförmige Rotationsbewegung mit 10,5 Umdrehungen pro Sekunde aus. Der Radius der Kreisbahn betrage 1 m. Das Rotationszentrum befinde sich zwischen zwei parallelen geradlinigen Hindernissen und habe von diesen jeweils den Abstand 2 m. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Körper in größter Nähe zu einem der Hindernisse. Zum Zeitpunkt $t = 5,6$ (in Sekunden) wird der Körper losgelassen. Trifft der Körper eines der Hindernisse? Wo befindet sich die Auftreffstelle?

5. Differentialrechnung

5.1 Die Funktion $q = \frac{1}{\mathsf{x}}$ auf $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^*$ differenzierbar mit der Ableitung

$$q'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}.$$

5.2 Die allgemeine Potenzfunktion $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = x^c \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar mit der Ableitung

$$p'(x_0) = c \cdot x_0^{c-1}.$$

5.3 Die n-te Wurzelfunktion ($n \in \mathbb{N}^*$), die Umkehrfunktion der n-ten Potenz x^n, auf $\mathbb{R}$ für ungerades n bzw. auf $\mathbb{R}_+$ für gerades n, ist in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Wie lautet die Ableitung?

5.4 Differenzieren Sie die Funktionen

a) $f = \mathsf{x}^2 \cdot 2^{\mathsf{x}}$ und b) $g = (1 + \mathsf{x}^2)^{\mathsf{x}}$.

5.5 Untersuchen Sie $f = \log_a$ ($a \neq 1$ positiv) auf Differenzierbarkeit

a) im Punkte $x_0 = 1$

b) in dem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

5.6 Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit

a) die Betragsfunktion: $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) := x \cdot |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

5.7 Beweisen Sie: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
(Mit $x = 0,01$ erhält man für e den Näherungswert 2,7048.)

6. Kurvendiskussion

6.1 Wie verläuft der Funktionsgraph G_f der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

6.2 Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = \frac{2x}{1+|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

auf Differenzierbarkeit. Berechnen Sie die Ableitung f' und bestimmen Sie den Funktionsverlauf, evtl. auch die Umkehrfunktion.

6.3 Zeigen Sie, daß für jedes $x \geq 1$ gilt:

$$\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}(x+1)\right| \leq \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

Mithilfe von $x = \dfrac{50}{49}$ berechnen sie einen Näherungswert von $\sqrt{2}$. Wie genau ist er?

7. Näherungsweise Funktionsberechnung

7.1 Zeigen Sie, daß für jedes $x \geq 1$ gilt:

$$\left|\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}(x+2)\right| \leq \frac{1}{9}(x-1)^2.$$

Mithilfe von $x = 1,029$ berechnen Sie einen Näherungswert von $\sqrt[3]{3}$. Wie genau ist er?

7.2 Berechnen Sie $\sin 275°$ auf vier Stellen hinter dem Komma.

7.3 Leiten Sie für den natürlichen Logarithmus ln die folgende Approximationsformel her:

$$\left| \ln x - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} \right| \leq \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \geq 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dabei verwenden wir die Abkürzung $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + ... + x_n$.

7.4 Leiten Sie selbst mithilfe des Approximationssatzes für die Funktion f auf $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \in I,$$

zu $x_0 = 0$ eine Approximationsformel her.
Berechnen Sie damit $\ln 2$ auf fünf Stellen hinter dem Komma genau.

7.5 Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen.

8. Integralrechnung

8.1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

a) $f = \log_a \qquad (a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1)$;

b) $f = \dfrac{1}{\mathsf{x}}$ auf $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

8.2 Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 (2+3x)\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 10^x dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$ e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$

8.3 Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+6}{x^2-4}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-2x-11}{x^2+x-12}\, dx.$

9. Anwendungen des Integrals

9.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt $|E|$ der Ellipsenfläche

$$E = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad (a, b \in \mathbb{R}_+^*).$$

9.2 Berechnen Sie das Volumen

a) des Zylinders $Z = \{(x, y, z) : |x| \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$;

b) des Kegels ($h, r \in \mathbb{R}_+^*$):

$$K = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, y^2 + z^2 \leq r^2 \left(\frac{x}{h}\right)^2\right\}.$$

9.3 Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist

$$\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(Die Folge der Stammbruchsummen ist also nicht beschränkt.)